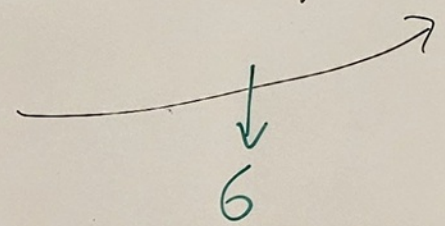


	e	L	P
$2x + 3y = 1$	$(1 \frac{8}{13})$	$2 \frac{8}{13}$	$= 1$
$x - 4y = -9$	$(1 \frac{11}{13})$	$-4 \frac{2}{13}$	$= -9$
$2x - y = -1$	$(2 \frac{4}{13})$	$-3 \frac{4}{13}$	$= -1$

$x = -1$
 $y = \frac{20}{13}$



e^2
 2,61
 3,41
 6,44
 \downarrow
 12,46

L	P	e	e^2
4	= 1	(3)	9
-9	= -9	(0)	0
-4	= -1	(3)	9
		\downarrow	\downarrow
		6	18

dla
 $x = -1$
 $y = 2$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \Delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\Delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} \Delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

w domu: masz umieć to dokończyć!

Z1 Dane:

(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

Szukane:

a, b

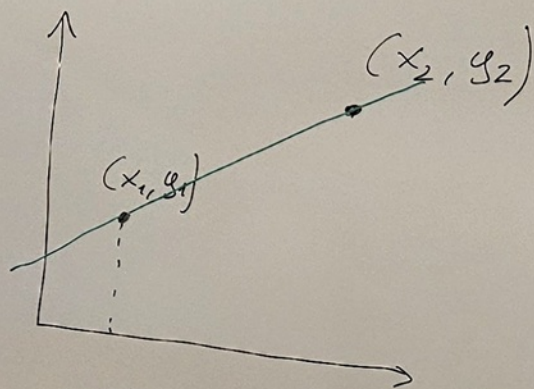
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\underset{2 \times 1}{Y} = \underset{(2 \times 2)}{X} \cdot \underset{1 \times 1}{\hat{\sim}}$$

$$\hat{X}^{-1} \cdot Y = \hat{X}^{-1} \cdot X \cdot \hat{\sim}$$

$$\hat{X}^{-1} \cdot Y = I \cdot \hat{\sim}$$

$$\hat{\sim} = \hat{X}^{-1} \cdot Y$$



Z2

$$ax + by + c = 0$$

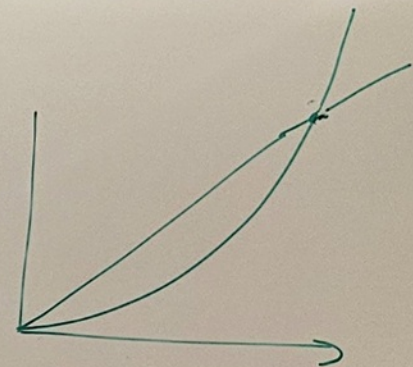
Z1

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

$$a \leftarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$b \leftarrow y_1 - ax_1$$

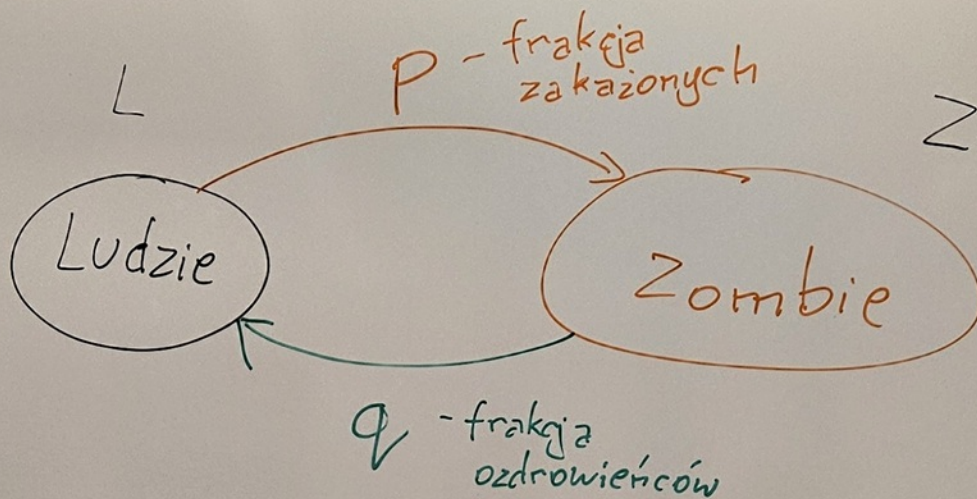


W domu:

Rozkminić algorytm

dla Z2

$$\hat{\sim} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



1. Zamodelować stan epidemii nast
za pomocą operacji mnożenie macierz-vektor
2. Policzyc śmieszność $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$
3. Wyciągnij wnioski o zachowaniu układu
na podstawie śmieszności.

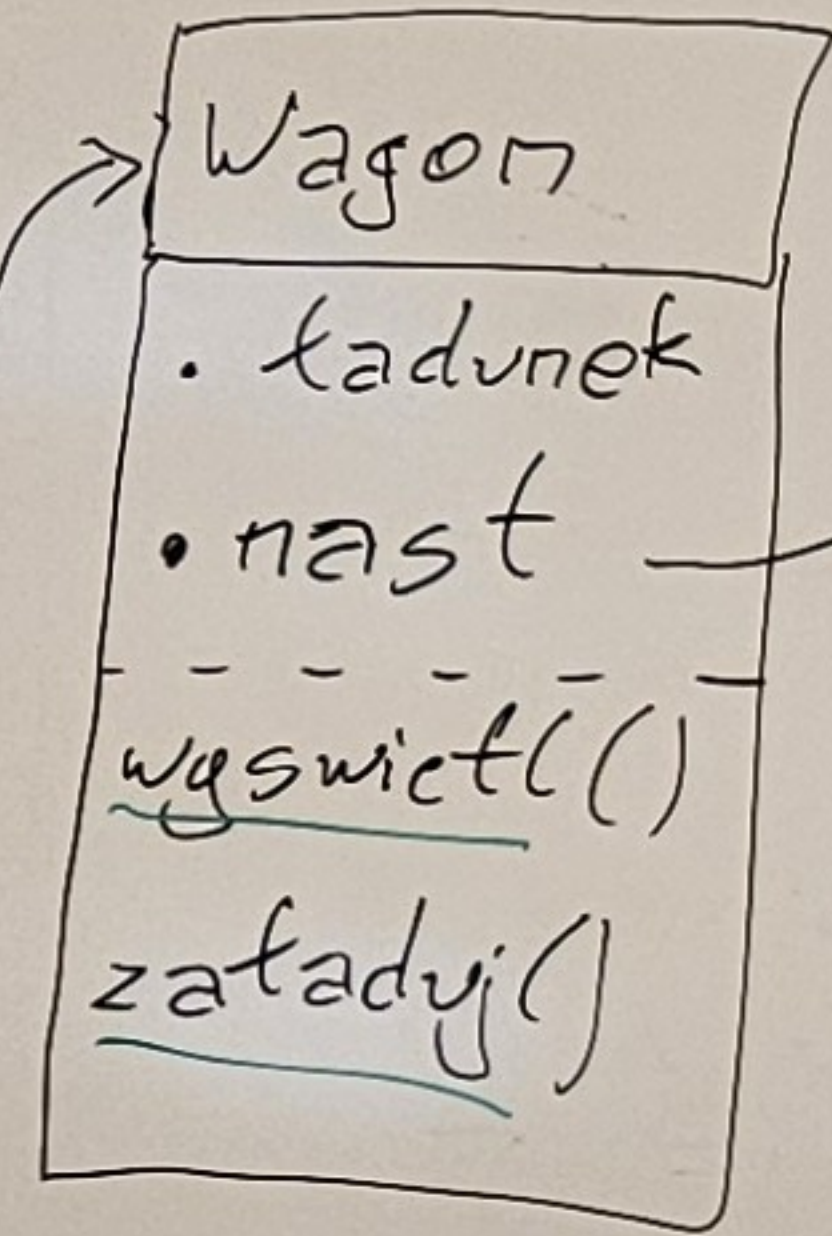
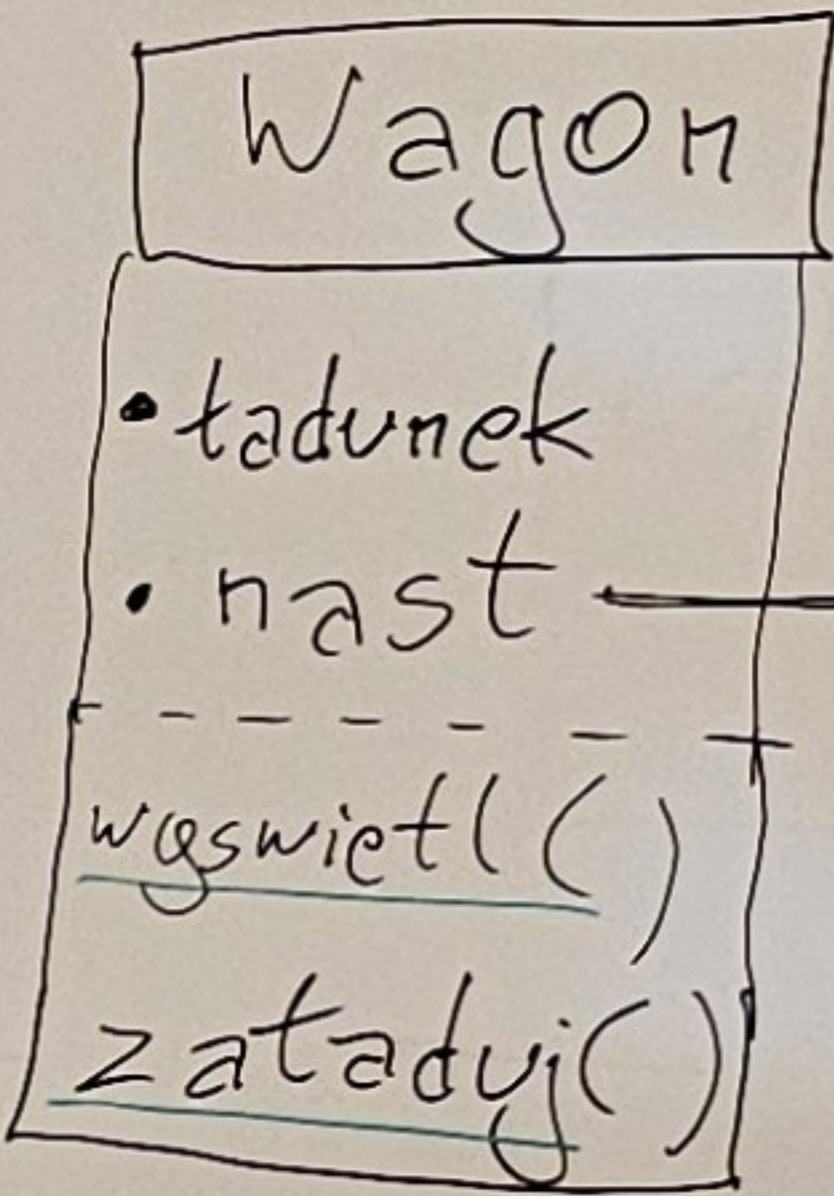
$$w = \begin{bmatrix} L \\ Z \end{bmatrix}$$

$$L \leftarrow (1-p)L + qZ$$

$$Z \leftarrow pL + (1-q)Z$$

$$\begin{bmatrix} L_{\text{jutro}} \\ Z_{\text{jutro}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\text{dzis}} \\ Z_{\text{dzis}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{\text{dzis}} \\ Z_{\text{dzis}} \end{bmatrix}$$

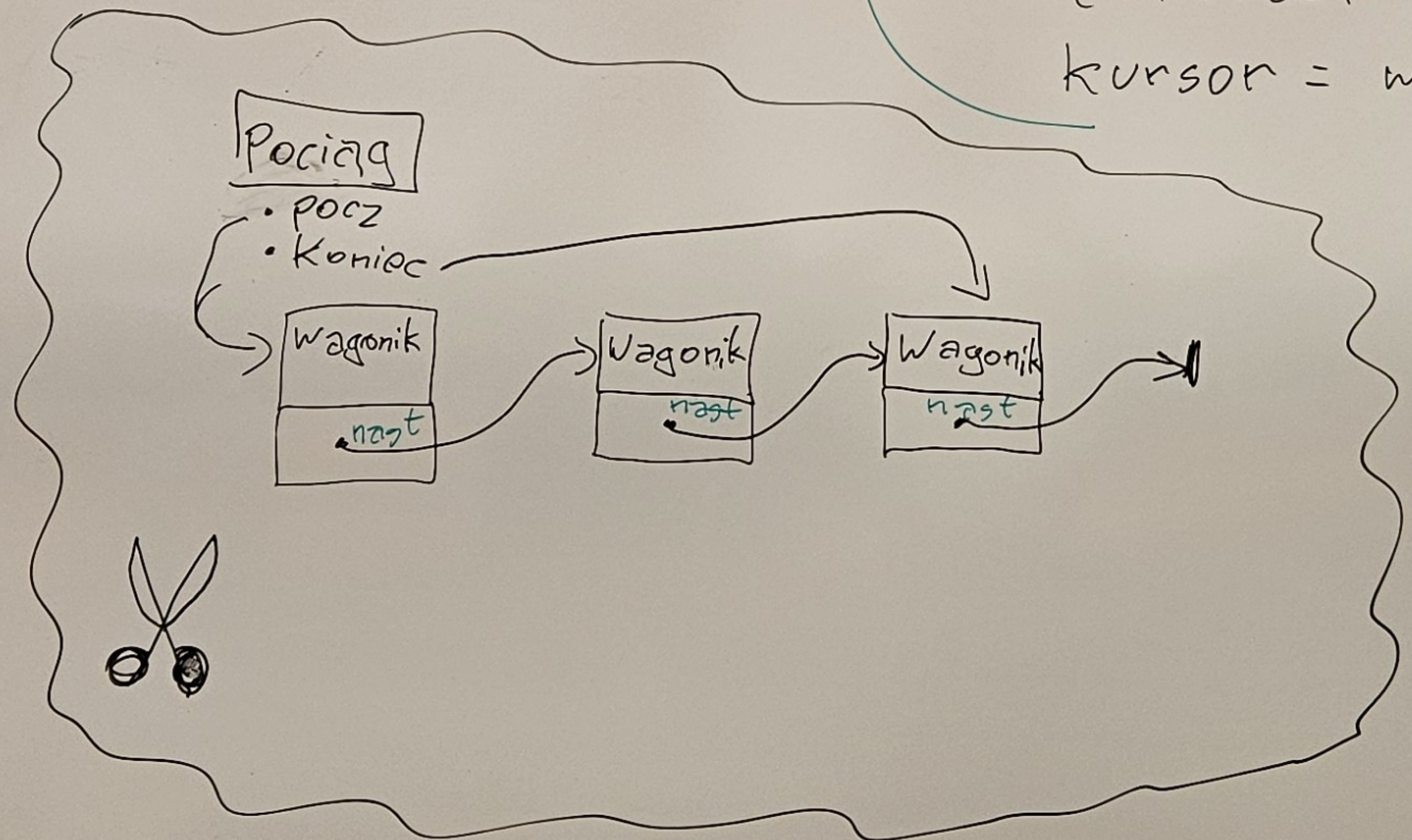
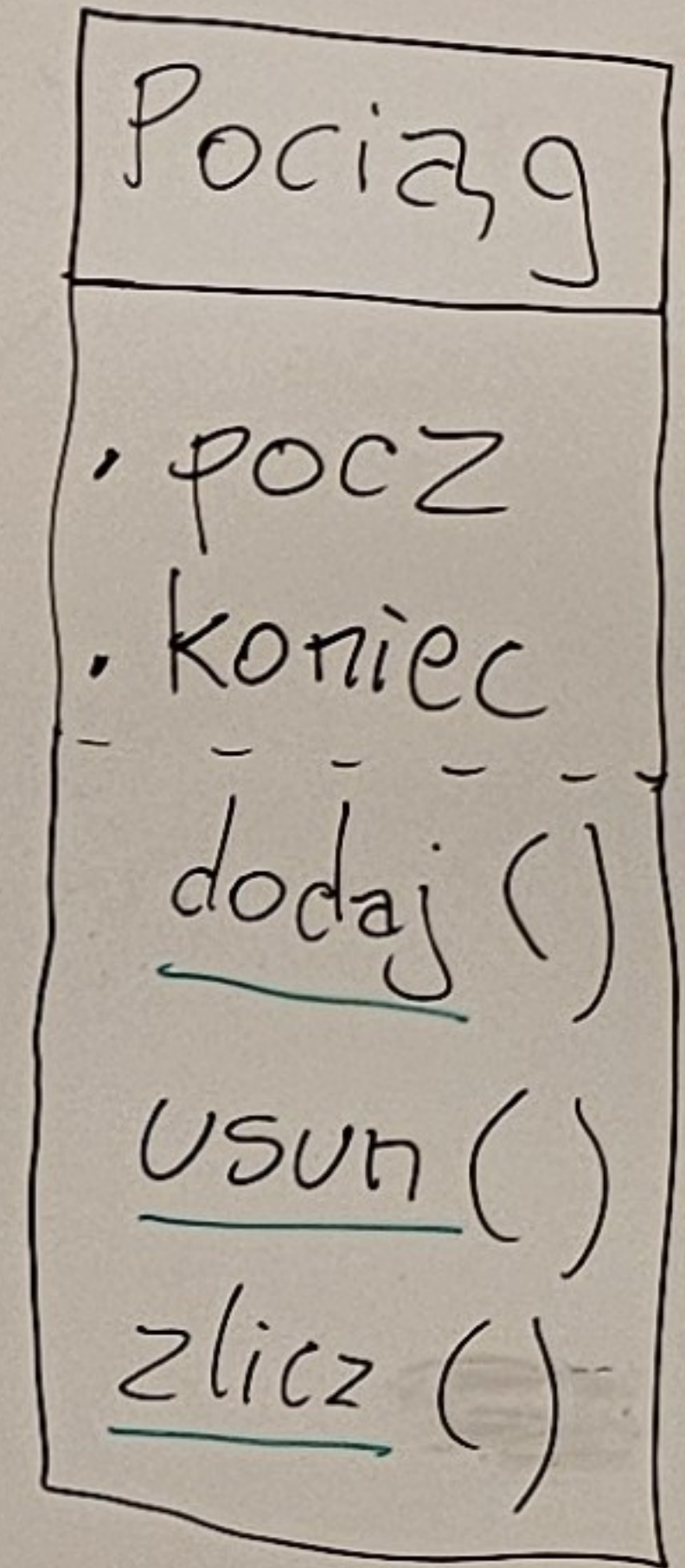


ładunek → lista krotek: [('landrynki': 10), ('zelki': 2)]
→ słownik { 'landrynki': 10, 'zelki': 2 }

w tym kodzie jest błądzik

cursor = wagonik_1
while cursor != None:
 cursor = wagonik1.nast

lista = [...]
lista2 = lista



Jeżeli masz
zaległości, to
nadrob w domu, bo
skończy się ocena
1 na koniec roku


```
import numpy as np  
l_wierszy, l_kolumn = 3, 5  
A = np.random.randint(-3, 4, size=(l_wierszy, l_kolumn))
```

```
A = list(A)
```

```
def pivot(A, [4, -1, 0, 3, 2])
```

do kolumny^[2] o wart, 0 dodajemy

4 * kolumna[0] macierzy A

-1 * kolumna[1] macierzy A

+ 3 * kolumna[3] ~ 1 1 -

+ 2 * kolumna[4] - 1 1 -

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \Delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\Delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \Delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \text{dla } \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \odot = B \quad / \cdot A^T L$$

$$A^T \cdot A \cdot \odot = A^T B \quad / \cdot (A^T A)^{-1} L$$

$$\underbrace{(A^T A)^{-1}}_I \cdot A^T A \cdot \odot = (A^T A)^{-1} \cdot A^T B$$

$$\odot = (A^T A)^{-1} A^T B$$

W domu 1.

Wykazać, że $A^T A$

dla dowolnych $A_{M \times N}$ jest

symetryczna.

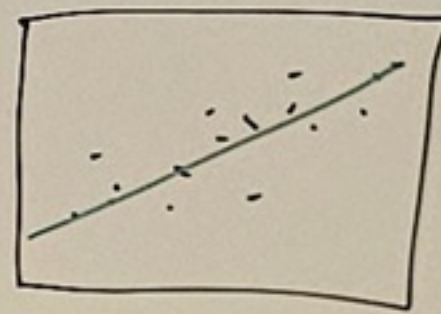
W domu 2.

Weź dowolne dane:

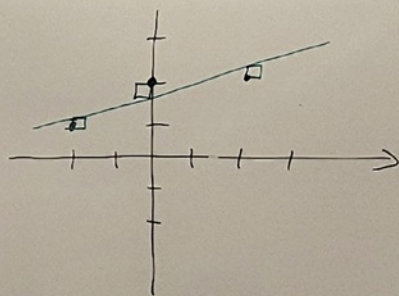
x	x ₁	x ₂
y	y ₁	y ₂

~~Pro~~ Dopasuj linię $y = ax + b$
do danych i zrób obrazek

Wyswietl
macierz $A^T A$



$$y_i = ax_i + b$$



1 krok
zapisz pkt równy

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 2 = 0a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B$$

2. krok
zapisz macierzowo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. krok
uzyskaj jakąś
macierz kwadratową
przy niewiadomych

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. krok
pozbądź się macierzy
kwadratowej atakując jej
odwrotnością

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 30 \\ 08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Odp: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}$ to funkcja,
która przybliża
punkty $\dots \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3$



1.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 1) \quad (1 \times 3)$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A x

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

0. Rozgrzewka

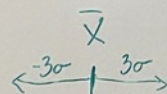
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

odch.
stand.
 σ

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2} = \sigma^2$$

variancja
 σ^2



w domu
Zmierzyć
- wzrost
- wagę
ewentualnie
- ciś. górne
- ciś. dolne
- puls (tętno)

Użyj tylko X , \bar{X} , $\frac{1}{N}$ aby zapisać w języku macierzy
wzór na variancję.

Wyzwanie

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N]$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = X Y^T$$

$$\begin{bmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(1x2) (1x1) a+b+c

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

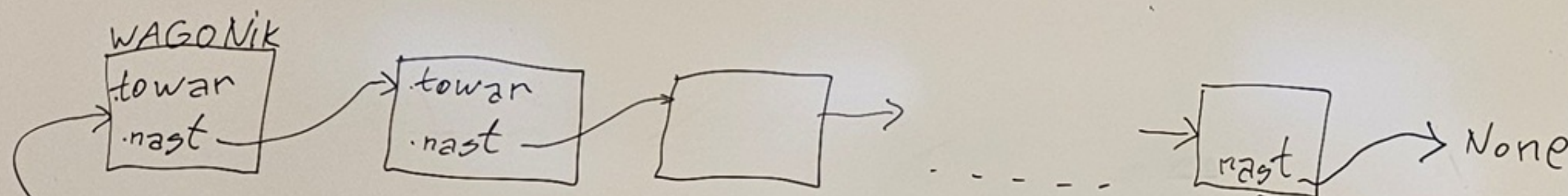
$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad 1$$

funkcja dodaj-do-glowy (self, nowy-wagonik):

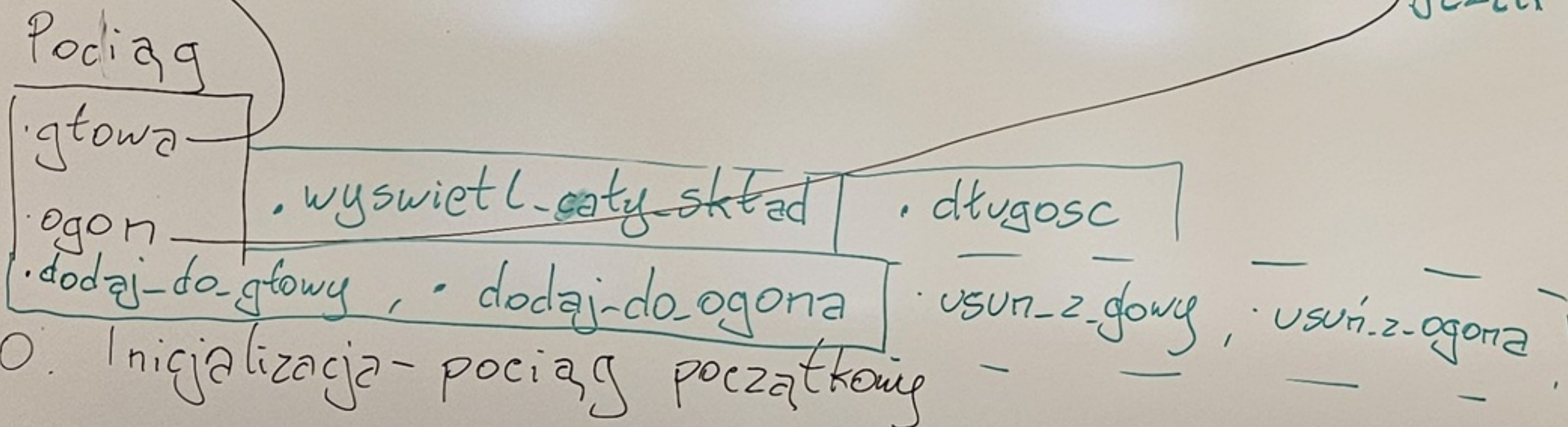
ulepszenie

jeżeli self.glowa == None wykonaj
 self.glowa ← nowy-wagonik
 self.ogon ← nowy-wagonik
 ? nowy-wagonik.nast ← None
 przeciwnym razie wykonuj
 nowy-wagonik.nast ← self.glowa
 self.glowa ← nowy-wagonik

funkcja dodaj-do-ogona (self, nowy-wagonik)



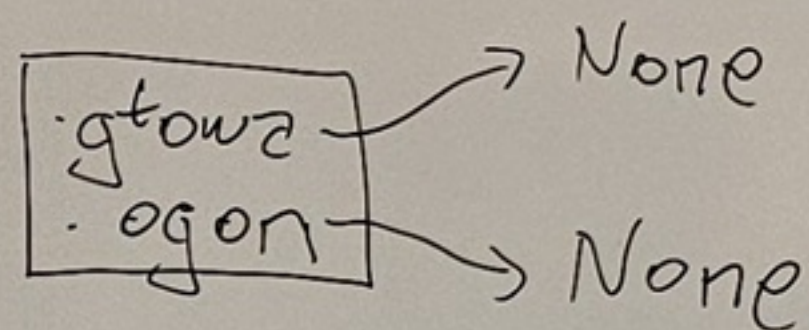
jeżeli self.dlugosc() == 0



funkcja wyswietl-caty-sklad(self):

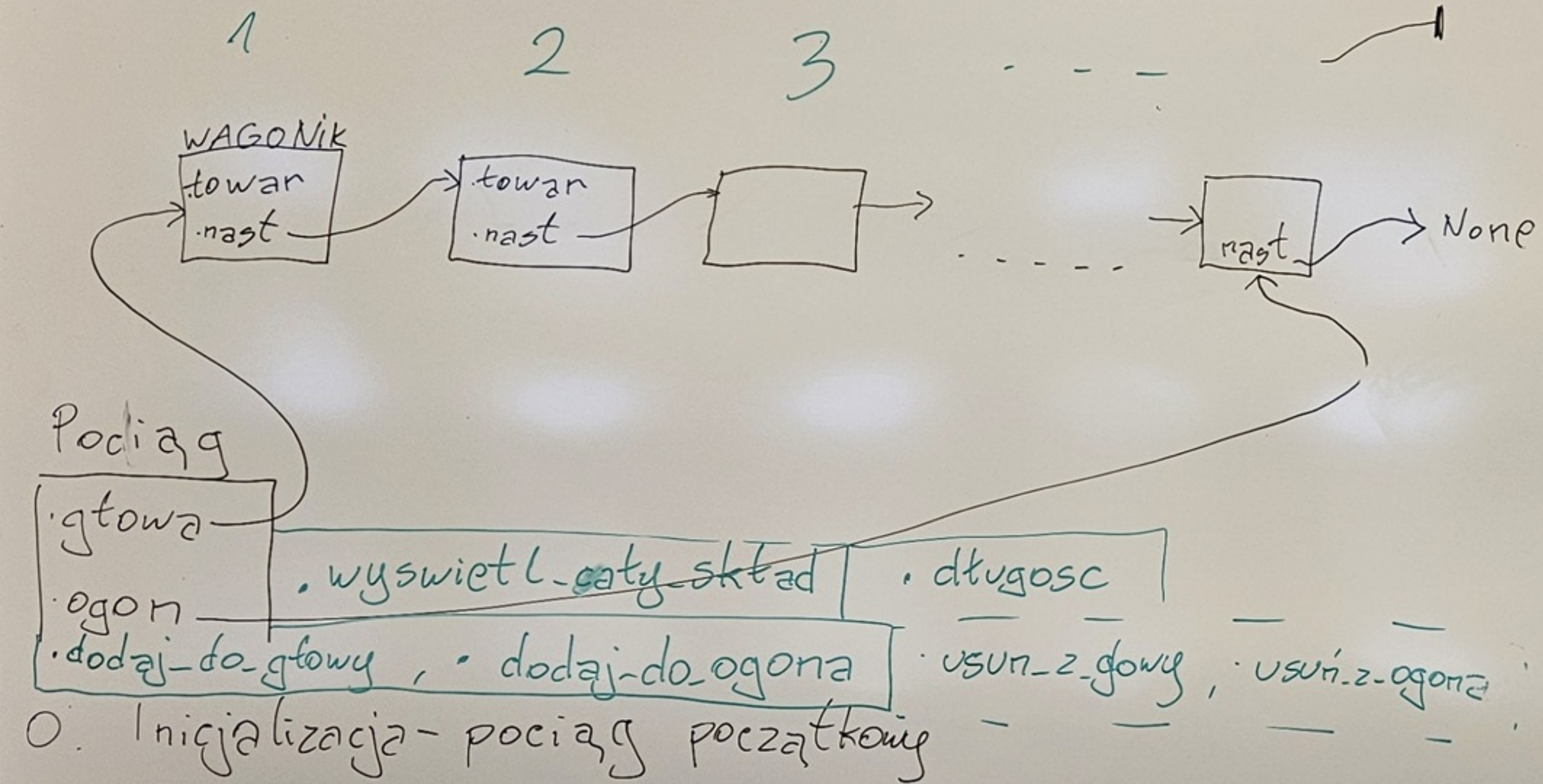
kursor ← self.glowa
 dopóki kursor != None wykonuj
 wyswietl kursor.towar
 kursor ← kursor.nast

warunek
kontynuacji
zakonczenia



< >

funkcja `usun(self, numer)`



$$p = \frac{\text{interesujące zdarz.}}{\text{wszystkie zdarz.}}$$



zdarz.
złoż.

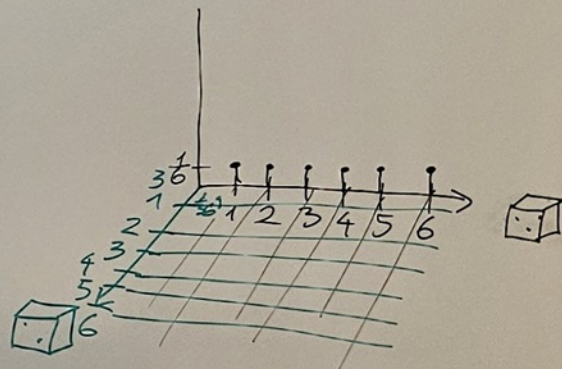
$$p(X > 2) = \frac{4}{6}$$

$$p(\text{X}) = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{.}) =$$

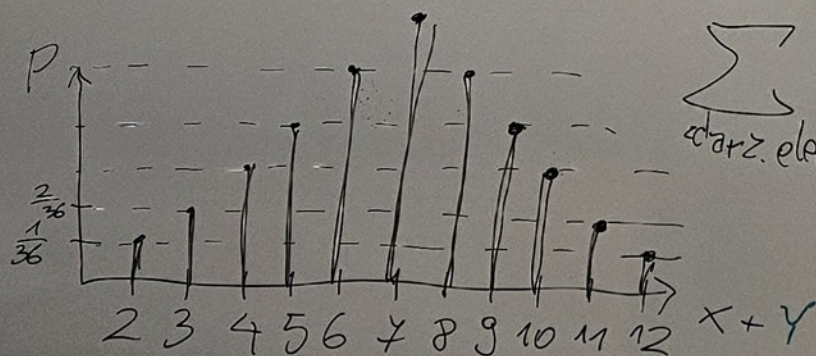
$$p(\text{.}) =$$

$$p(\text{.})$$



$p(\text{.}) + p(\text{.}) + \dots$
jeżeli ^{podzcz.} zdarz. są niezależne

$$p(\text{X}, \text{Y})$$



$$\sum_{\text{zdarz. elem}} p(\text{zdarz. elem}) = 1$$

$$p(\text{X} + \text{Y})$$

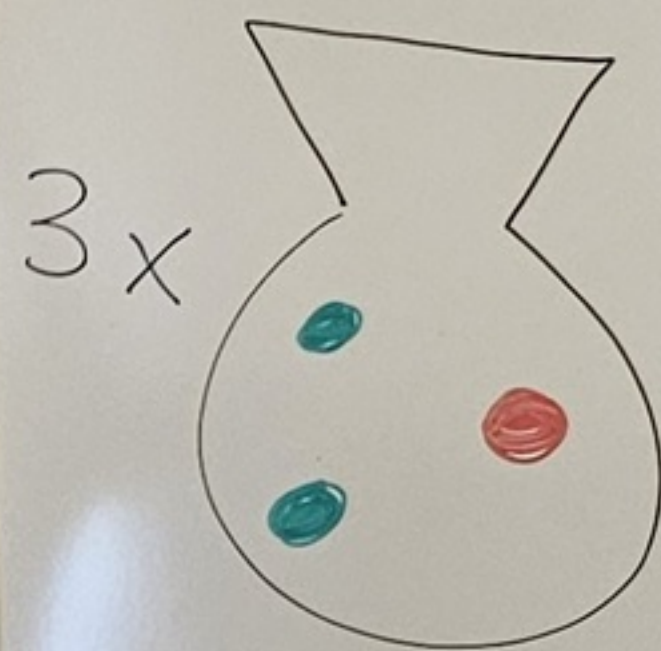
from random import randint

randint(1, 6)

[rzut for rzut in randint(1, 6)]

$$P(\bullet | \text{orzeł}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\bullet | \text{reszka}) = \frac{1}{3}$$



$$P(\bullet) = \frac{3}{4}$$

$$P(\bullet) = \frac{4}{7}$$

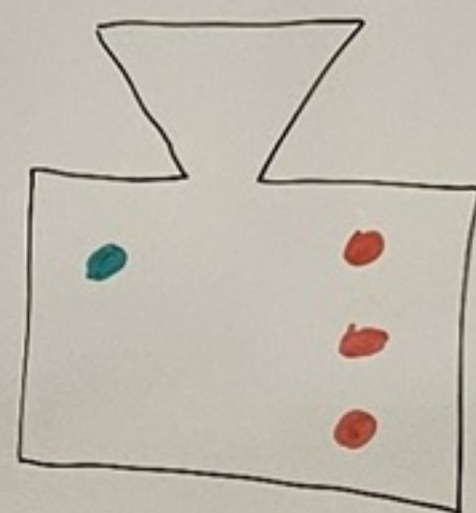
W domu

Sprawdź,
opanyj
korzystanie

import numpy.random as nr

nr.randint(1, 7, size=100)

nr.choice(['orzeł', 'reszka'], p=[0.4, 0.6])



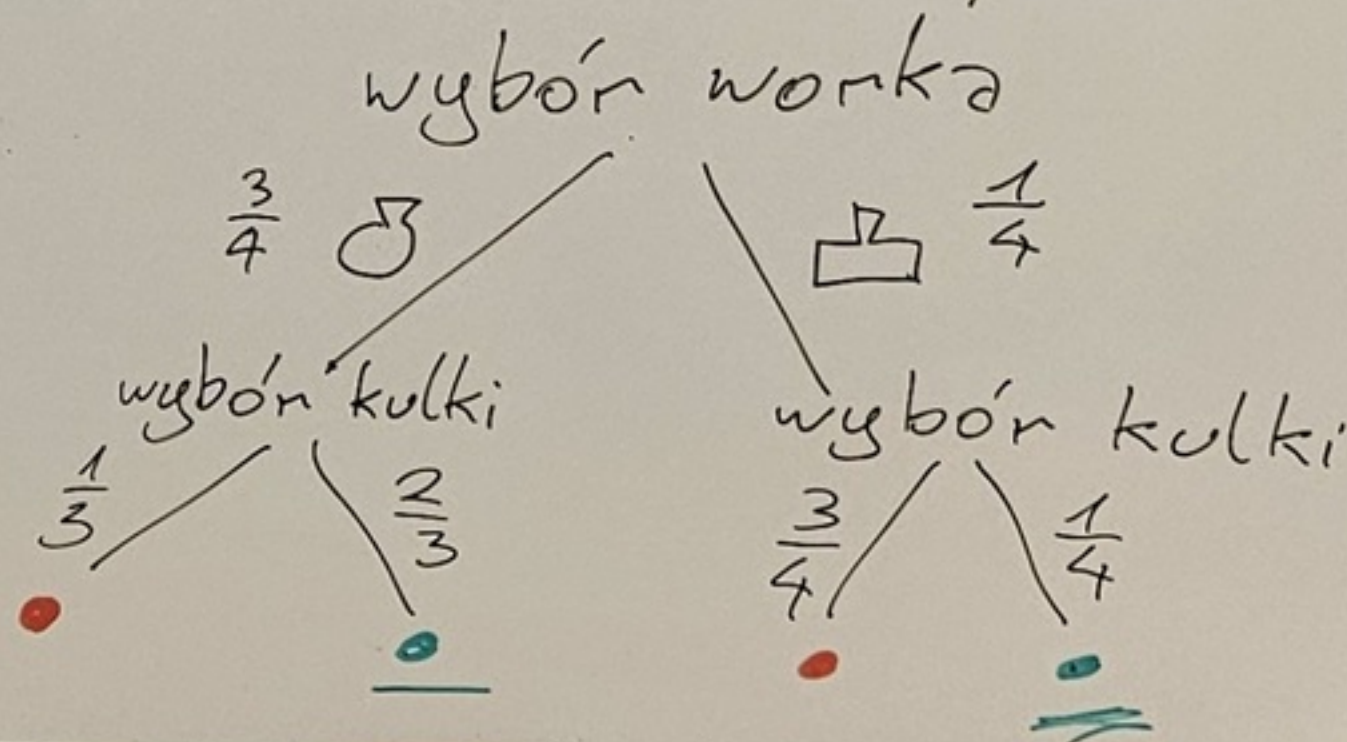
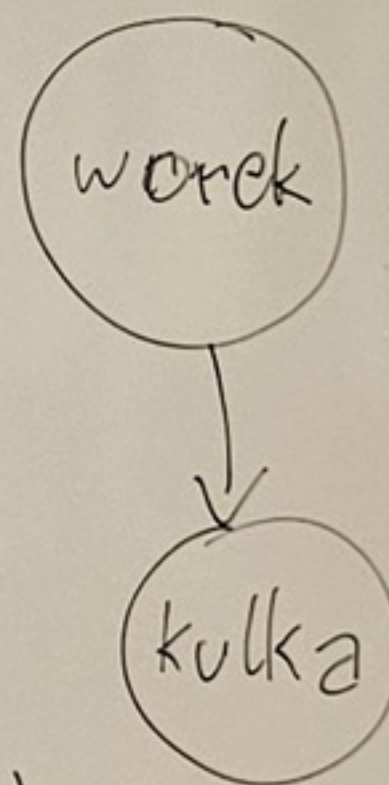
$$P(\bullet | \text{orzeł}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\bullet | \text{reszka}) = \frac{3}{4}$$

3 orzeł + 1 reszka

$$P(\bullet) = P(\bullet | \text{orzeł}) \cdot P(\text{orzeł}) + P(\bullet | \text{reszka}) \cdot P(\text{reszka})$$

$$P(\bullet) = P(\bullet | \text{orzeł}) \cdot P(\text{orzeł}) + P(\bullet | \text{reszka}) \cdot P(\text{reszka})$$



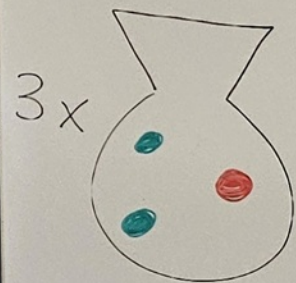
from random import randint

randint(1, 6)

[rzut for rzut in randint(1, 6)]

$$p(\bullet | 8) = \frac{2}{3}$$

$$p(\bullet | 8) = \frac{1}{3}$$

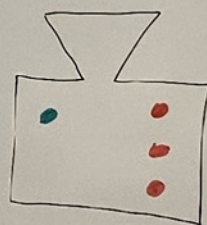


$$p(\bullet) = \frac{3}{4}$$

$$p(\bullet) = \frac{4}{4}$$

W domu

Sprawdź,
opanyj
korzystanie

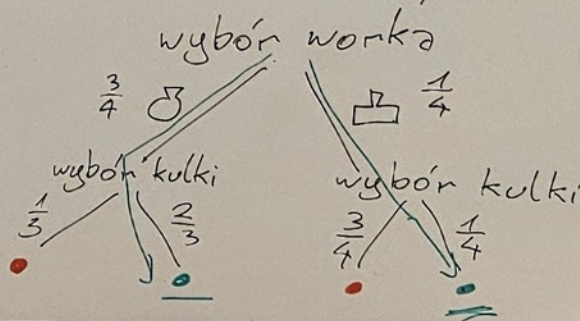


$$p(\bullet | 8) = \frac{1}{4}$$

$$p(\bullet | 8) = \frac{3}{4}$$

38 + 8

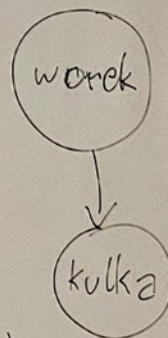
$$p(\bullet) = p(\bullet | 8) \cdot p(8) + p(\bullet | 8) \cdot p(8)$$



import numpy.random as nr

nr.randint(1, 4, size=100)

nr.choice(['orzeł', 'reszka'], p=[0.4, 0.6])



$$P = \frac{\text{liczba int. zdarz}}{\text{liczba wsz. zdarz}} =$$

$$= \frac{P(\text{liczba int. zdarz})}{P(\text{liczba wsz. zdarz})}$$

$$P(\text{worek} | \bullet)$$

$$P(\text{worek} = \Sigma | \bullet) = \frac{P(\bullet | \Sigma) \cdot P(\Sigma)}{P(\bullet | \Sigma) \cdot P(\Sigma) + P(\bullet | \Delta) \cdot P(\Delta)}$$

$$\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}$$