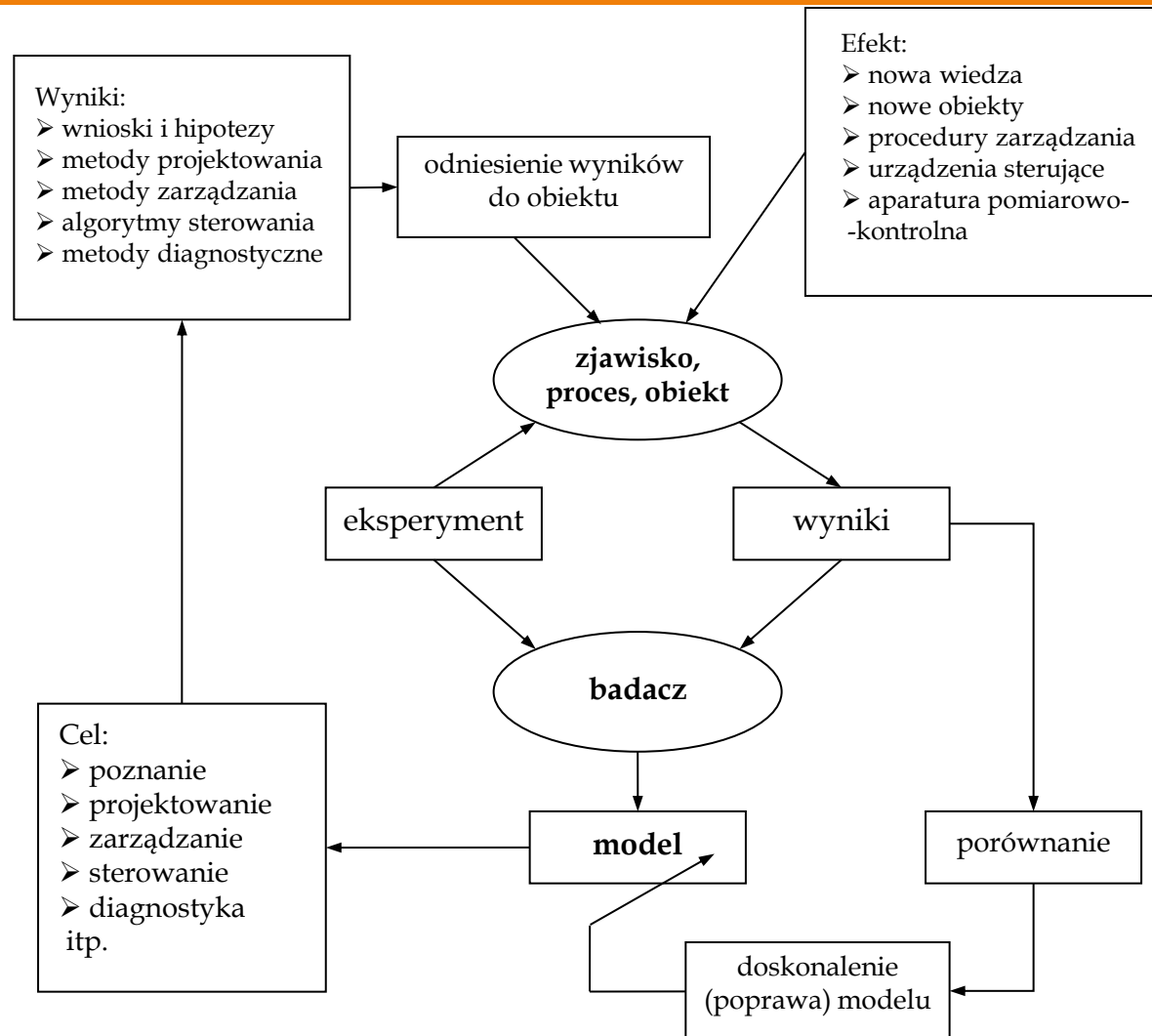


Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 2a. Podstawowe zadania identyfikacji. Obiekt w klasie modeli

Model w badaniach systemowych



Modele matematyczne

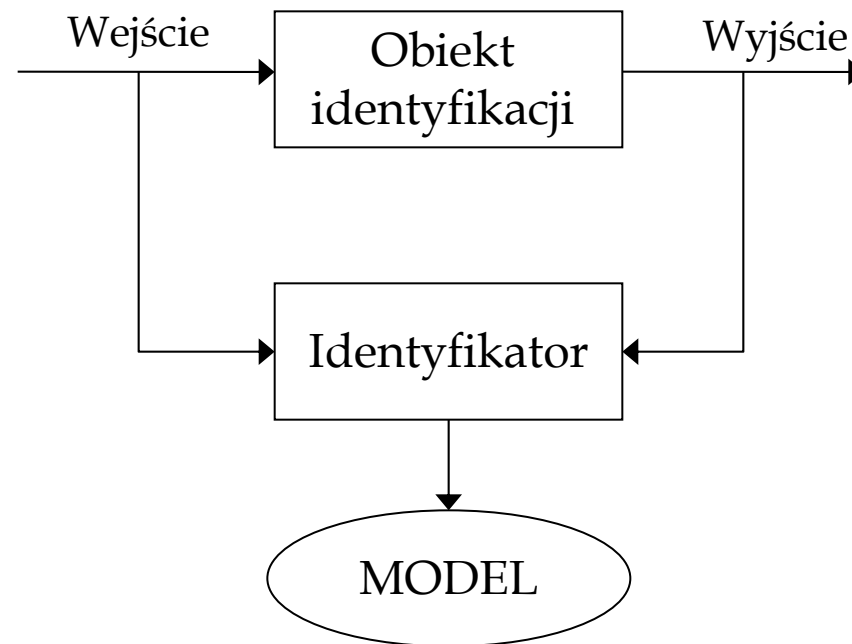
- ⌘ **Model jest uproszczoną reprezentacją systemu, w czasie i przestrzeni, stworzoną w zamiarze zrozumienia zachowania systemu rzeczywistego**
- ⌘ Zestaw równań opisujących badany proces
 - Zależności statyczne
 - Własności dynamiczne – równania różniczkowe, różnicowe
 - Modele probabilistyczne
- ⌘ Zestaw prawdziwych zdań logicznych
 - Wiedza eksperta

Zadanie Identyfikacji

∞ 4 ∞

Zadanie identyfikacji

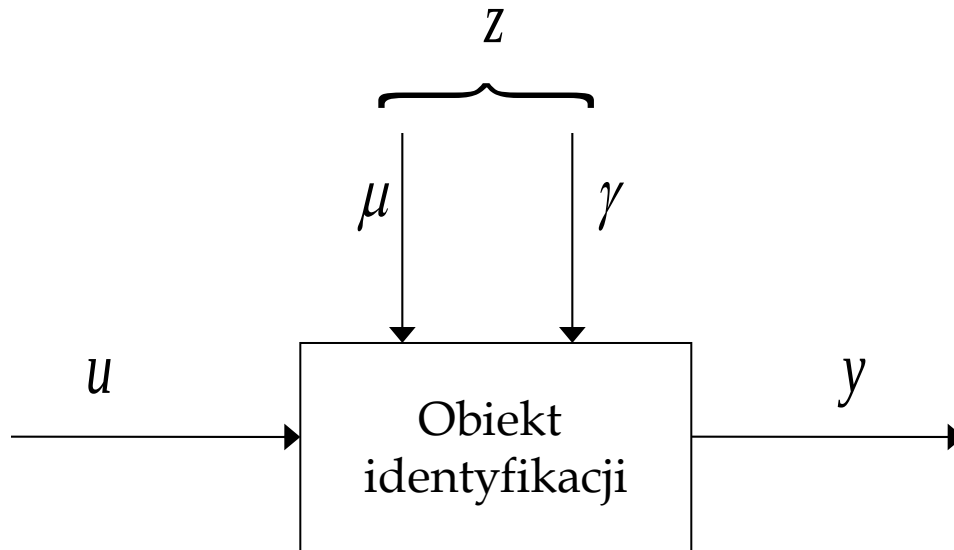
Zadanie identyfikacji – proces tworzenia modelu matematycznego obiektu na podstawie obiektu



Zadanie identyfikacji

1. Określenie obiektu identyfikacji
2. Określenie klasy modeli
3. Organizacja eksperymentu
4. Wyznaczenie algorytmu identyfikacji
5. Wykonanie identyfikatora

Ad.1. Określenie obiektu identyfikacji



u – wejście

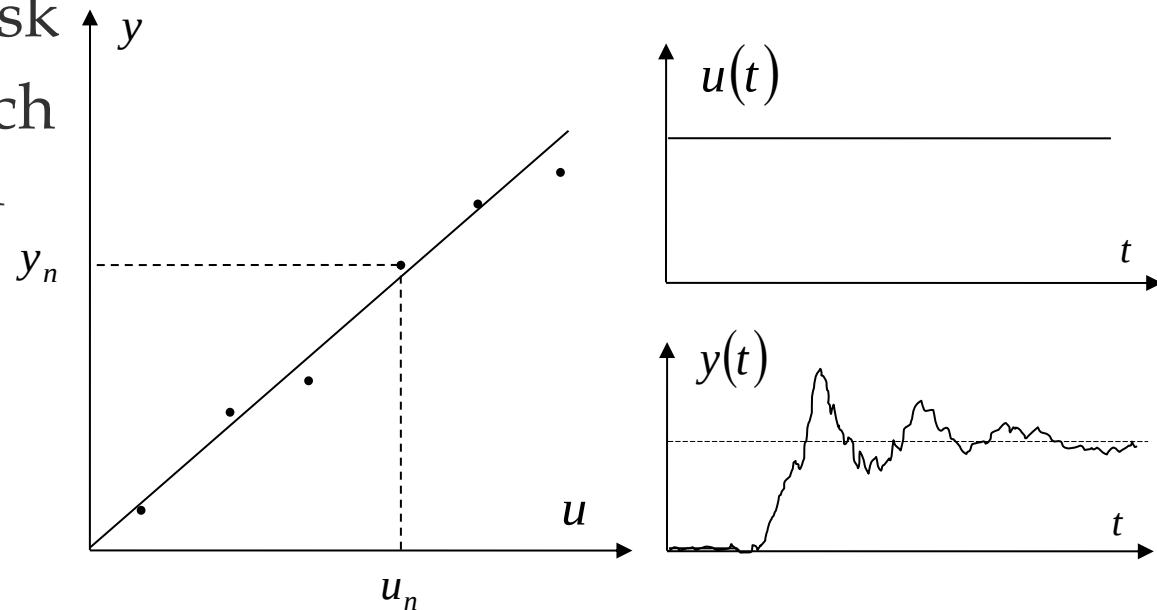
y – wyjście

μ – zakłócenia mierzalne

γ – zakłócenia niemierzalne

Ad.2. Określenie klasy modeli

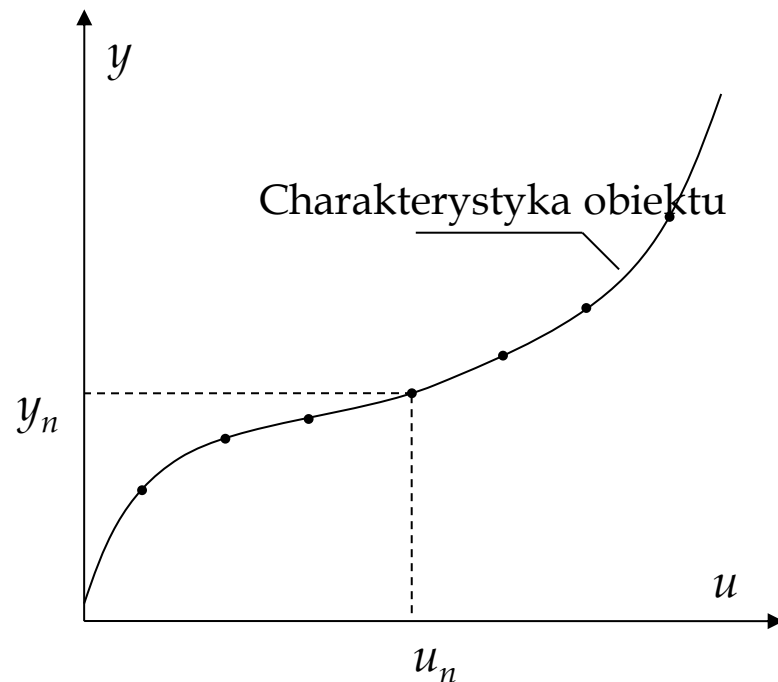
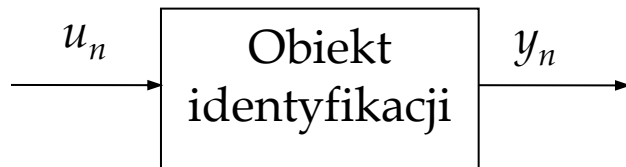
- ⌘ Analiza zjawisk
- ⌘ Analiza danych pomiarowych



- ⌘ Model arbitralny
- ⌘ Model oparty na wiedzy eksperta

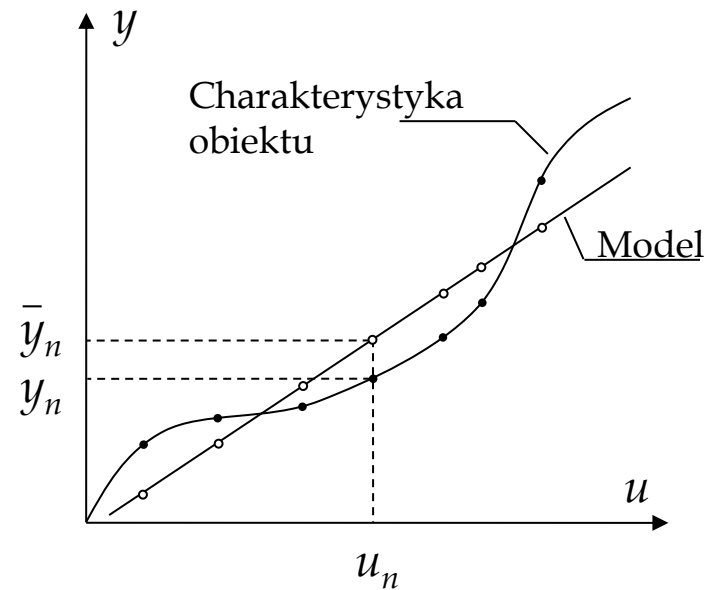
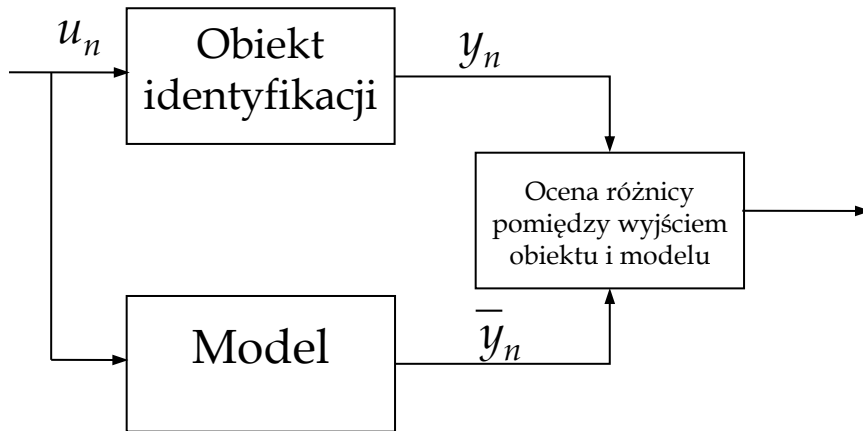
Ad.2. Określenie klasy modeli

∞ Obiekt w klasie modeli



Ad.2. Określenie klasy modeli

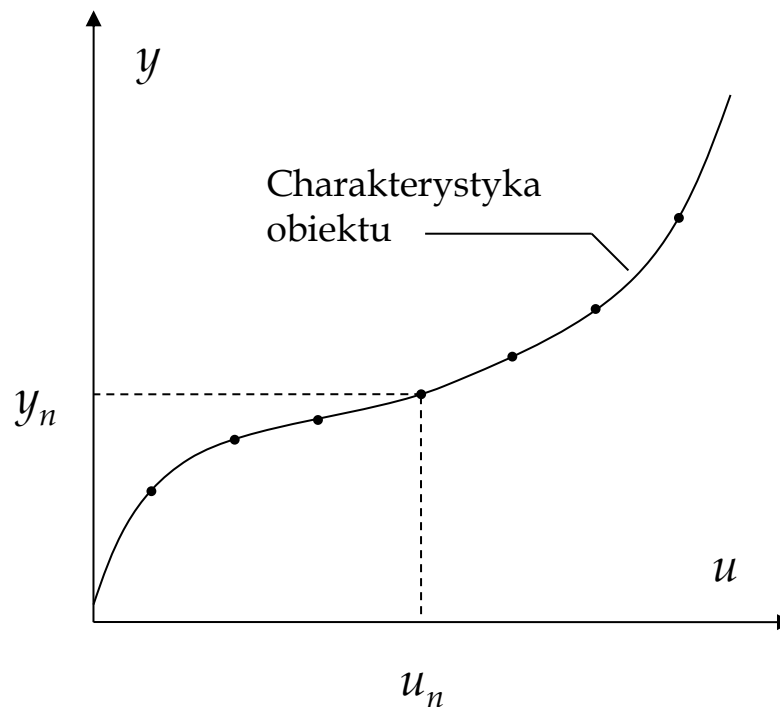
☞ Wybór optymalnego modelu



Ad.3. Organizacja eksperymentu

Obiekt statyczny

$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N], \quad Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$



Ad.3. Organizacja eksperymentu

Obiekt dynamiczny

$$U_T = \{u(t)\}_{t=t_0}^T, \quad Y_T = \{y(t)\}_{t=t_0}^T,$$

Obszerwacje dyskretne

$$t_1, t_2, \dots, t_N, t_n \in [t_0 \ T], n = 1, 2, \dots, N$$

$$U_N = \{u(t_n)\}_{n=1}^N, \quad Y_N = \{y(t_n)\}_{n=1}^N.$$

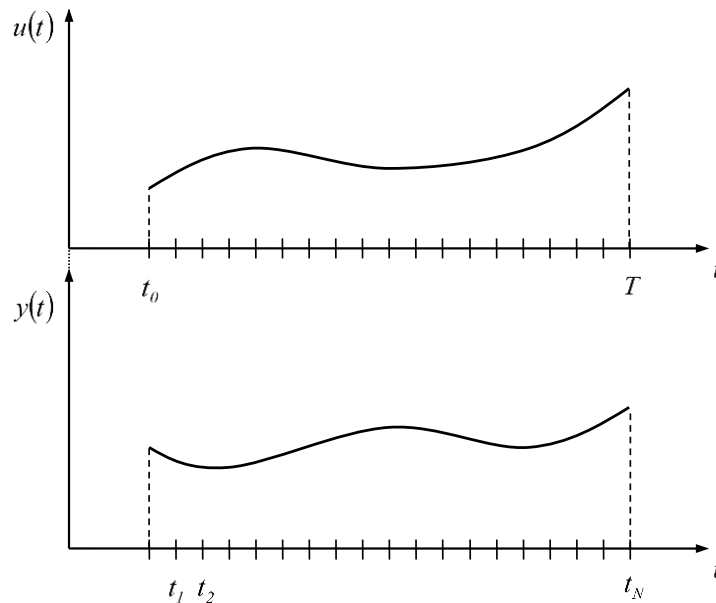
Dynaamiczny obiekt dyskretny

$$U_N = \{u_n\}_{n=1}^N, \quad Y_N = \{y_n\}_{n=1}^N.$$

Ad.3. Organizacja eksperymentu

Ciągły obiekt dynamiczny

Dla sygnału wejściowego $\{u(t)\}_{t_0}^T$ rejestrujemy odpowiedni sygnał wyjściowy $\{y(t)\}_{t_0}^T$ lub w wybranych chwilach $t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$ obserwujemy odpowiednio ciąg wejść $\{u(t_n)\}_{n=0}^N$ i wyjść $\{y(t_n)\}_{n=0}^N$



Ad.3. Organizacja eksperymentu

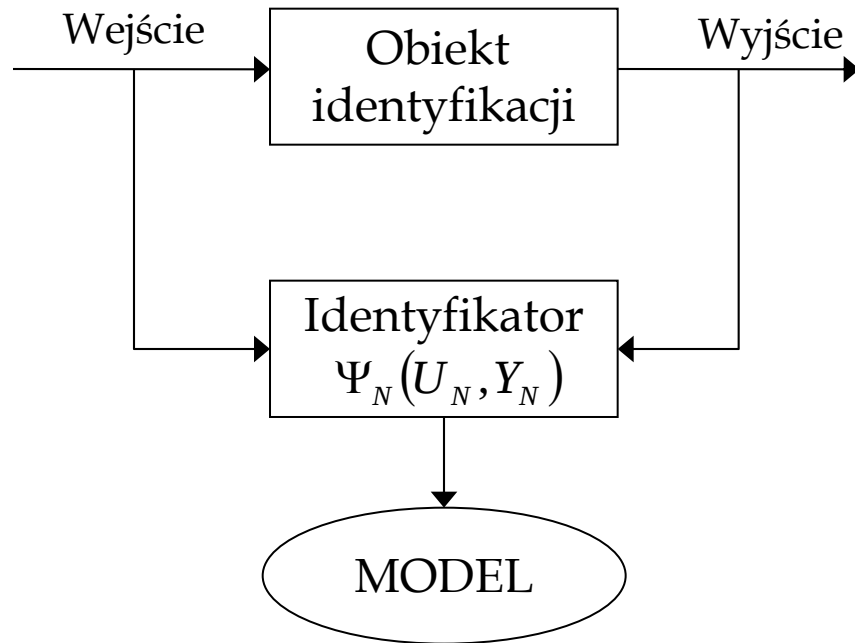
∞ Eksperyment pasywny

- Sygnały wejściowe : $U_N, \{u(t)\}_{t_0}^T, \{u(t_n)\}_{n=0}^N, \{u_n\}_{n=0}^N$ są tylko obserwowane

∞ Eksperyment aktywny

- Sygnały wejściowe : $U_N, \{u(t)\}_{t_0}^T, \{u(t_n)\}_{n=0}^N, \{u_n\}_{n=0}^N$ mogą być zaprojektowane (zaplanowane)

Ad.4. Wyznaczenie algorytmu identyfikacji



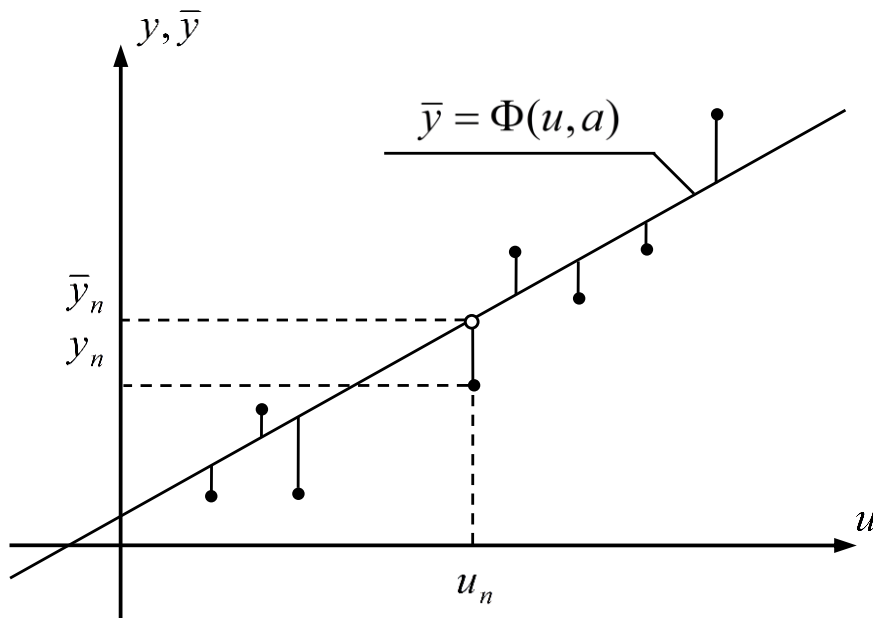
U_N – Seria pomiarowa wejść

Y_N – Wyniki pomiarów wyjść

Ψ_N – Algorytm identyfikacji

Ad.4. Wyznaczenie algorytmu identyfikacji

$$a^* = \Psi(U_N, Y_N)$$



$$Q(a) = \sum_{n=1}^N (y_n - au_n)^2$$

$$a_n^* = \frac{\sum_{n=1}^N y_n u_n}{\sum_{n=1}^N u_n^2}$$

Ad. 5. Wykonanie identyfikatora

∞ Algorytm identyfikacji

- Program komputerowy
- Realizacja sprzętowa

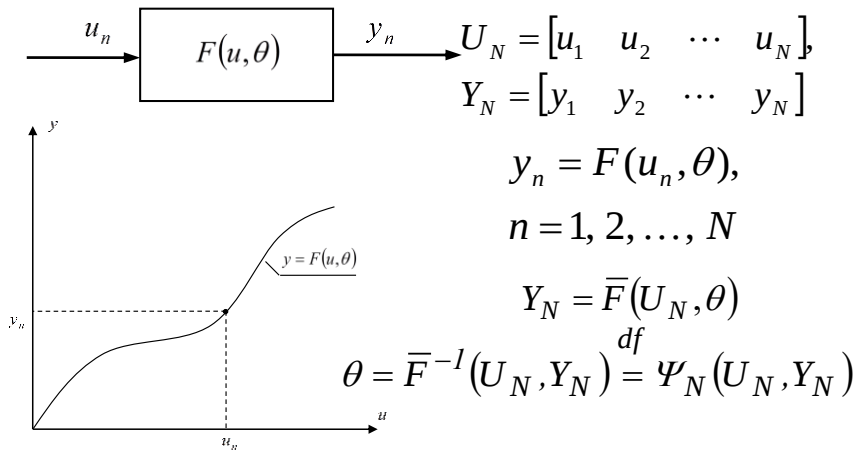
Typowe zadania identyfikacji

- ⌘ **Zadanie identyfikacji – proces tworzenia modelu matematycznego obiektu na podstawie obiektu**
- ⌘ Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu
- ⌘ Estymacja parametrów charakterystyki obiektu
- ⌘ Wybór optymalnego modelu problem deterministyczny
- ⌘ Wybór optymalnego modelu problem probabilistyczny

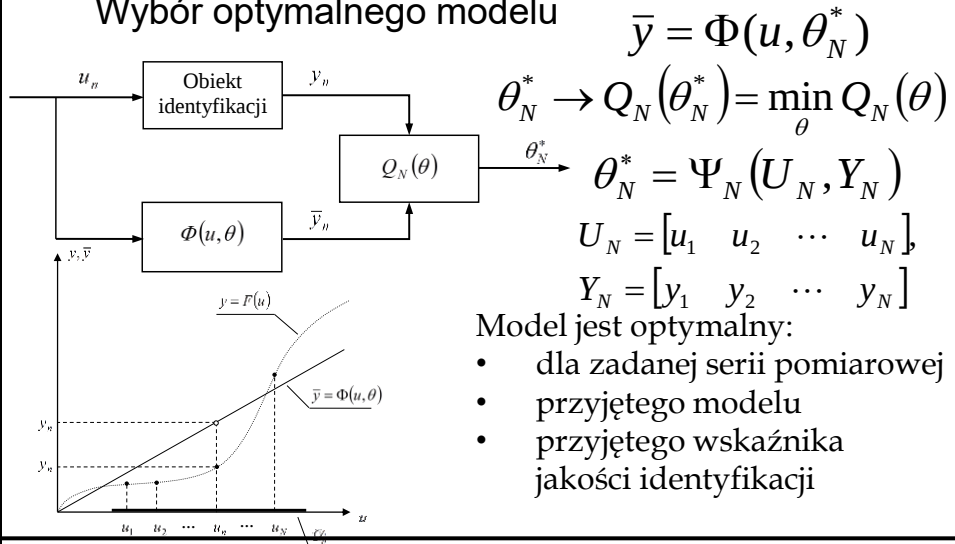
Podstawowe zadania identyfikacji podsumowanie

Obiekt w klasie modeli

D
e
t
e
r
m
i
n
i
s
t
y
c
z
n
y



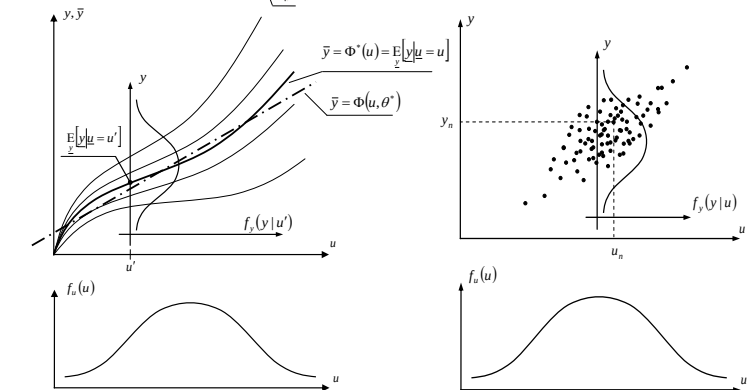
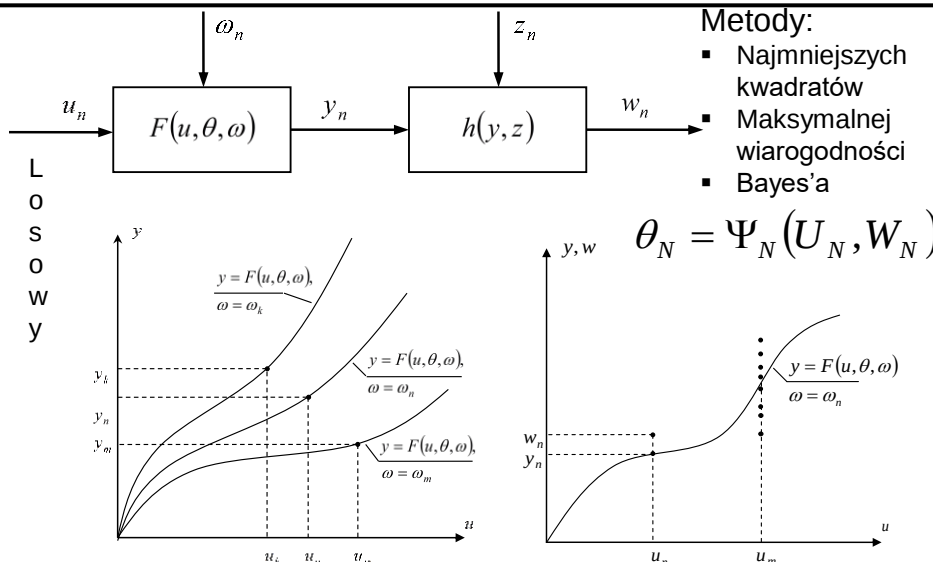
Wybór optymalnego modelu



Metody:

- Najmniejszych kwadratów
- Maksymalnej wiarygodności
- Bayes'a

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$$



Pełna informacja

- Regresja I rodzaju
- Regresja II rodzaju

Niepełna informacja

- Estymacja wskaźnika jakości
- Estymacja parametrów rozkładu
- Estymacja rozkładu

Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 2a. Podstawowe zadania identyfikacji. Obiekt w klasie modeli

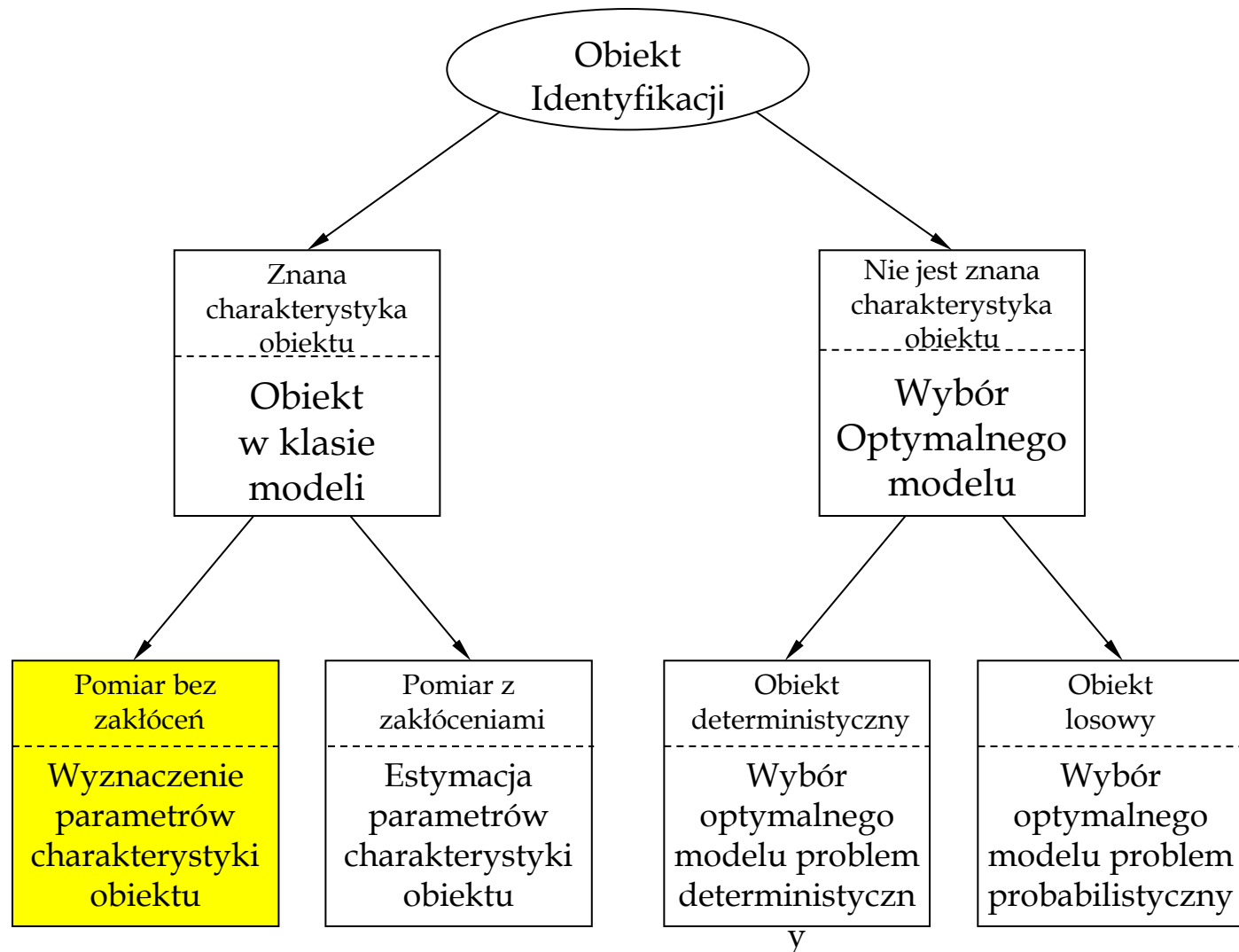
Obiekt w klasie Modeli

Przypadek deterministyczny

∞ 21 ∞

Wyznaczanie Parametrów Obiektu

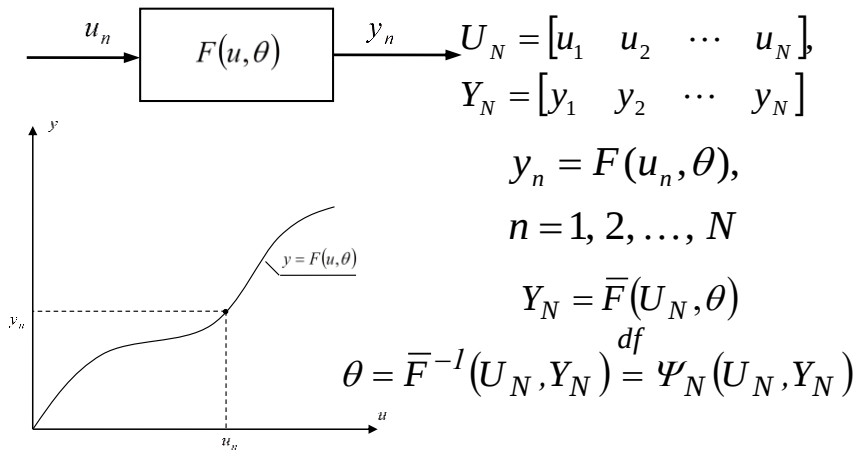
Typowe zadania identyfikacji



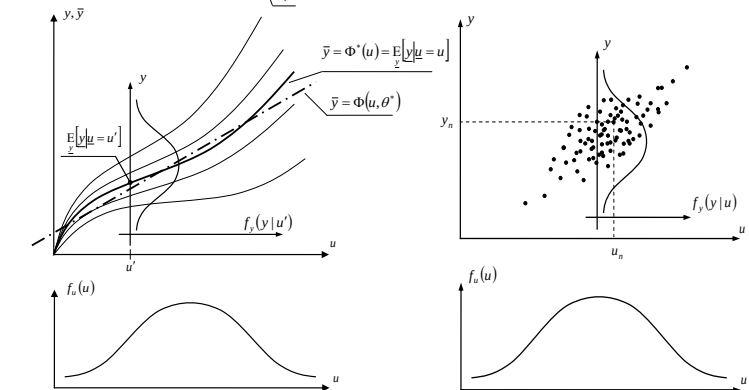
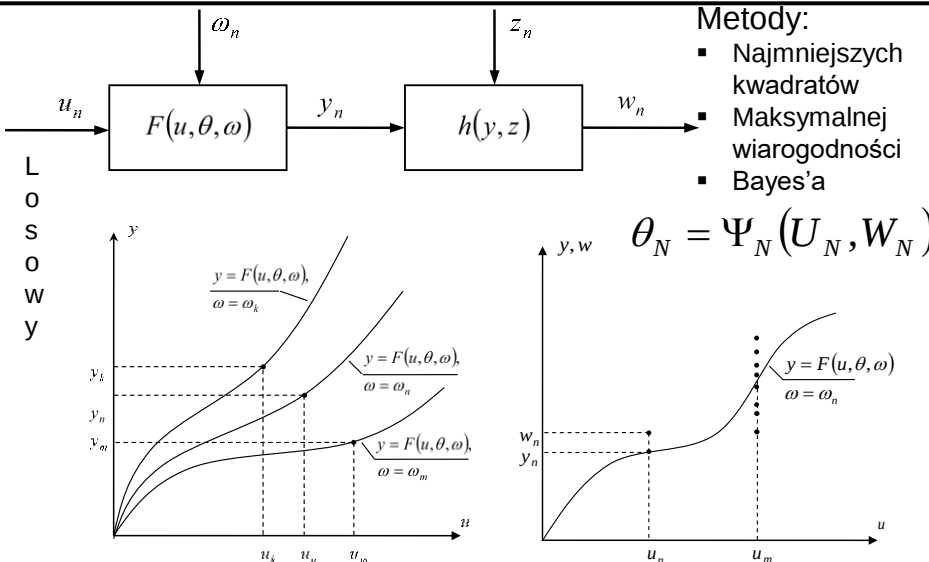
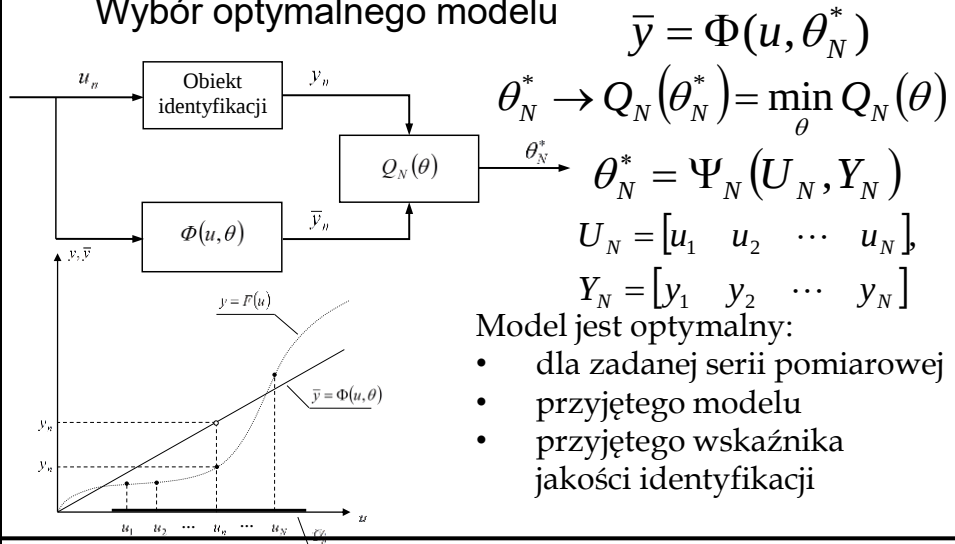
Podstawowe zadania identyfikacji podsumowanie

Obiekt w klasie modeli

D
e
t
e
r
m
i
n
i
s
t
y
c
z
n
y



Wybór optymalnego modelu



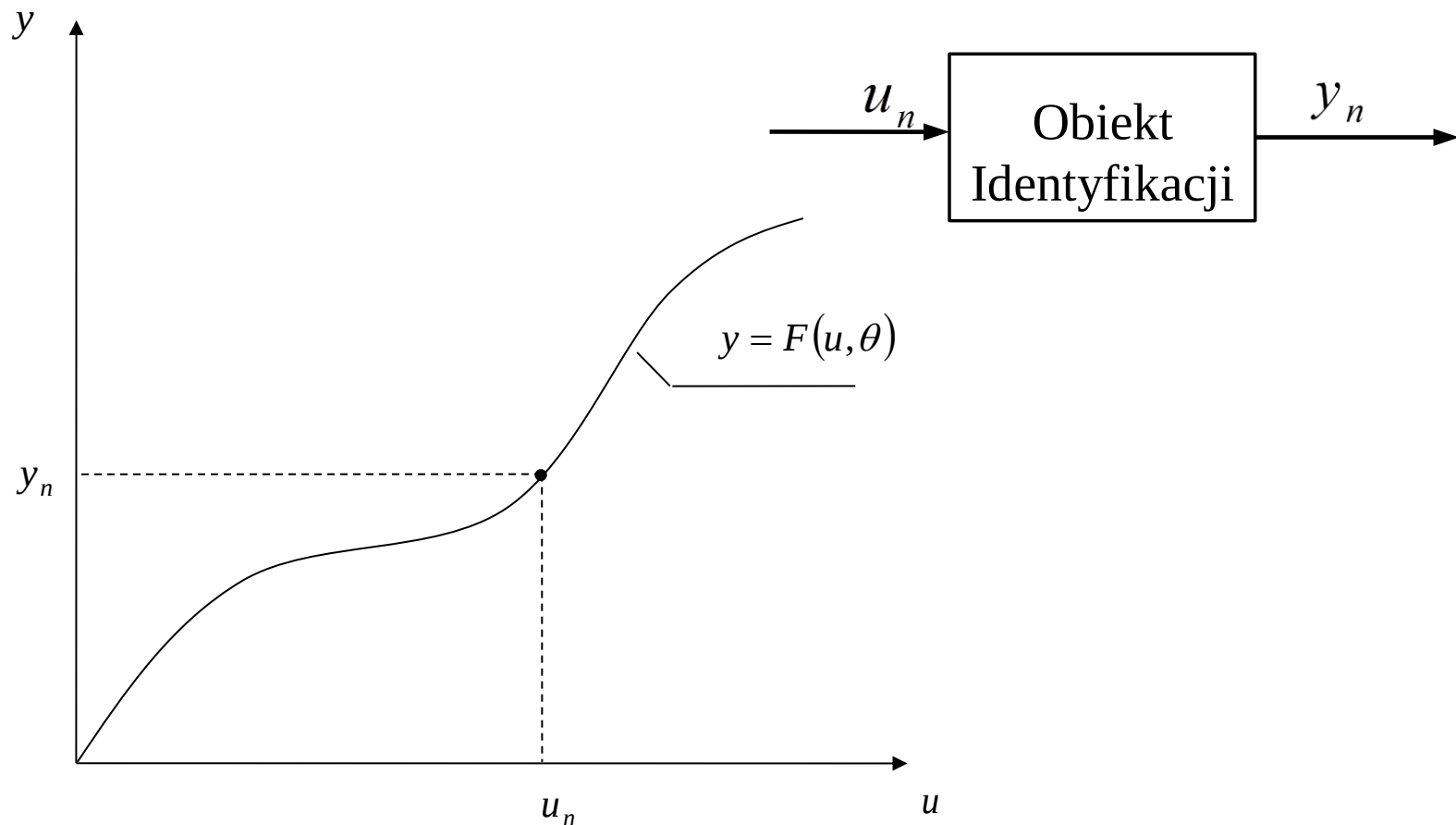
Pełna informacja

- Regresja I rodzaju
- Regresja II rodzaju

Niepełna informacja

- Estymacja wskaźnika jakości
- Estymacja parametrów rozkładu
- Estymacja rozkładu

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu



Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu

∞ Sformułowanie problemu

Charakterystyka statyczna obiektu: $y = F(u, \theta)$

F - znana funkcja

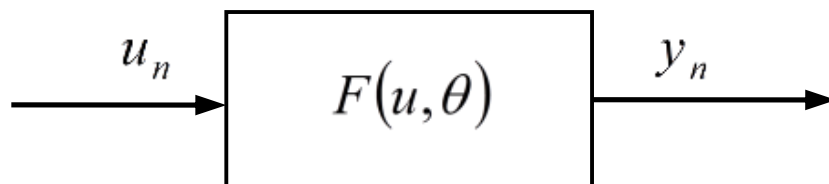
u - wektor wejść $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^S$ $\mathcal{U}$ - przestrzeń wejść

y - wektor wyjść $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{R}^L$ $\mathcal{Y}$ - przestrzeń w yjść

θ - nieznany parametr charakterystyki obiektu $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

Θ - przestrzeń parametrów

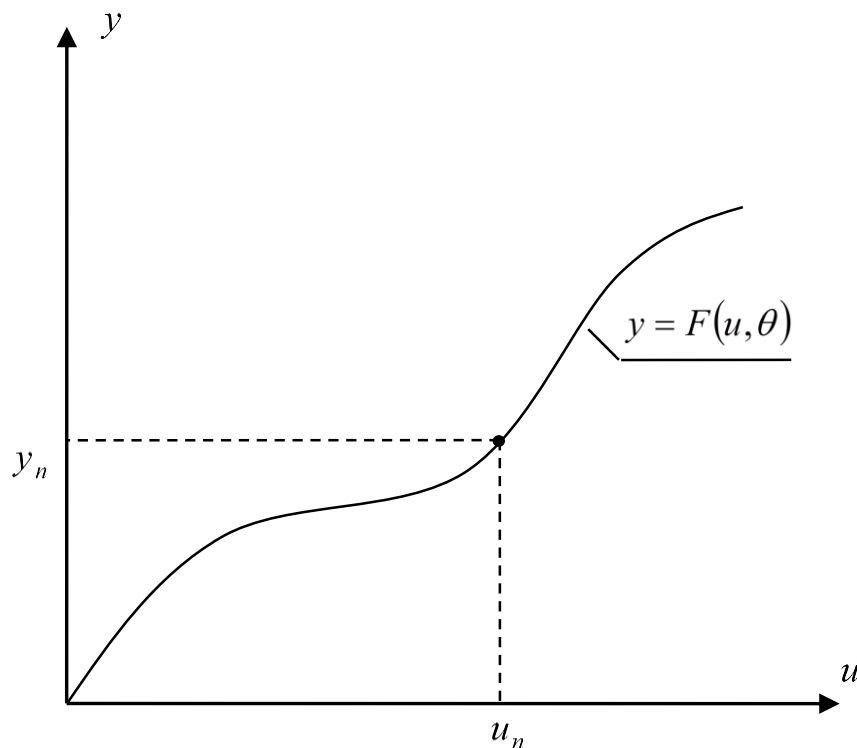
Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu



Pomiary:

$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N],$$

$$Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$



Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu

Punkty pomiarowe pokrywają się z punktami z charakterystyki obiektu, zatem dla każdego pomiaru prawdziwe jest równanie:

$$y_n = F(u_n, \theta), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

W zawartym zapisie ma ono postać:

$$[y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N] = [F(u_1, \theta) \quad F(u_2, \theta) \quad \dots \quad F(u_N, \theta)]$$

Oznaczając przez:

$$[F(u_1, \theta) \quad F(u_2, \theta) \quad \dots \quad F(u_N, \theta)] \stackrel{df}{=} \bar{F}(U_N, \theta)$$

Układ równań przyjmuje postać:

$$Y_N = \bar{F}(U_N, \theta)$$

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu

Rozwiązanie (rozwikłanie) równania $Y_N = \bar{F}(U_N, \theta)$ względem parametrów θ daje algorytm identyfikacji tj.:

$$\theta = \bar{F}^{-1}(U_N, Y_N) \stackrel{df}{=} \Psi_N(U_N, Y_N)$$

gdzie:

$\bar{F}^{-1}$ - Funkcja odwrotna względem θ

Ψ_N - Algorytm identyfikacji

Liczba koniecznych pomiarów N – spełnia warunek: $N \times L \geq R$

System jest identyfikowalny jeżeli istnieje taka seria pomiarowa wejść U_N (seria identyfikująca), która wraz z odpowiednią serią pomiarów wyjść Y_N jednoznacznie określa wektor parametrów θ , czyli istnieje jednoznaczne rozwiązanie względem θ równania: $Y_N = \bar{F}(U_N, \theta)$

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu - Przykład

Przykład

Model $y = F(u, \theta) = \theta^T f(u)$

gdzie:

$$f(u) = \begin{bmatrix} f^{(1)}(u) \\ f^{(2)}(u) \\ \vdots \\ f^{(R)}(u) \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \vdots \\ \theta^{(R)} \end{bmatrix}$$

Z warunkiem: $N = R$

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu - Przykład

Dla danego modelu układ równań wynikający z pomiarów ma postać:

$$y_n = \theta^T f(u_n), \quad n = 1, 2, \dots, R$$

A w zwartej postaci :

$$Y_R \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^T f(u_1) & \theta^T f(u_2) & \cdots & \theta^T f(u_R) \end{bmatrix}$$

lub

$$Y_R^T = \bar{f}^T(U_R)\theta$$

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu - Przykład

gdzie: $\bar{f}(U_R) \stackrel{df}{=} [f(u_1) \quad f(u_2) \quad \cdots \quad f(u_R)]$

Warunek identyfikowalności: $\det[\bar{f}^T(U_R)] \neq 0$

Algorytm identyfikacji ma postać:

$$\theta = \Psi_R(U_R, Y_R) = [\bar{f}^T(U_R)]^{-1} Y_R^T$$

Wyznaczenie parametrów charakterystyki obiektu - Przykład

Szczególny przypadek: $f(u) = u$, charakterystyka liniowa.

W tym przypadku układ równań ma postać:

$$Y_R^T = U_R^T \theta$$

a, algorytm identyfikacji:

$$\theta = \Psi_N(U_R, Y_R) = [U_R^T]^{-1} Y_R^T$$

z warunkiem identyfikowalności: $\det[U_R] \neq 0$

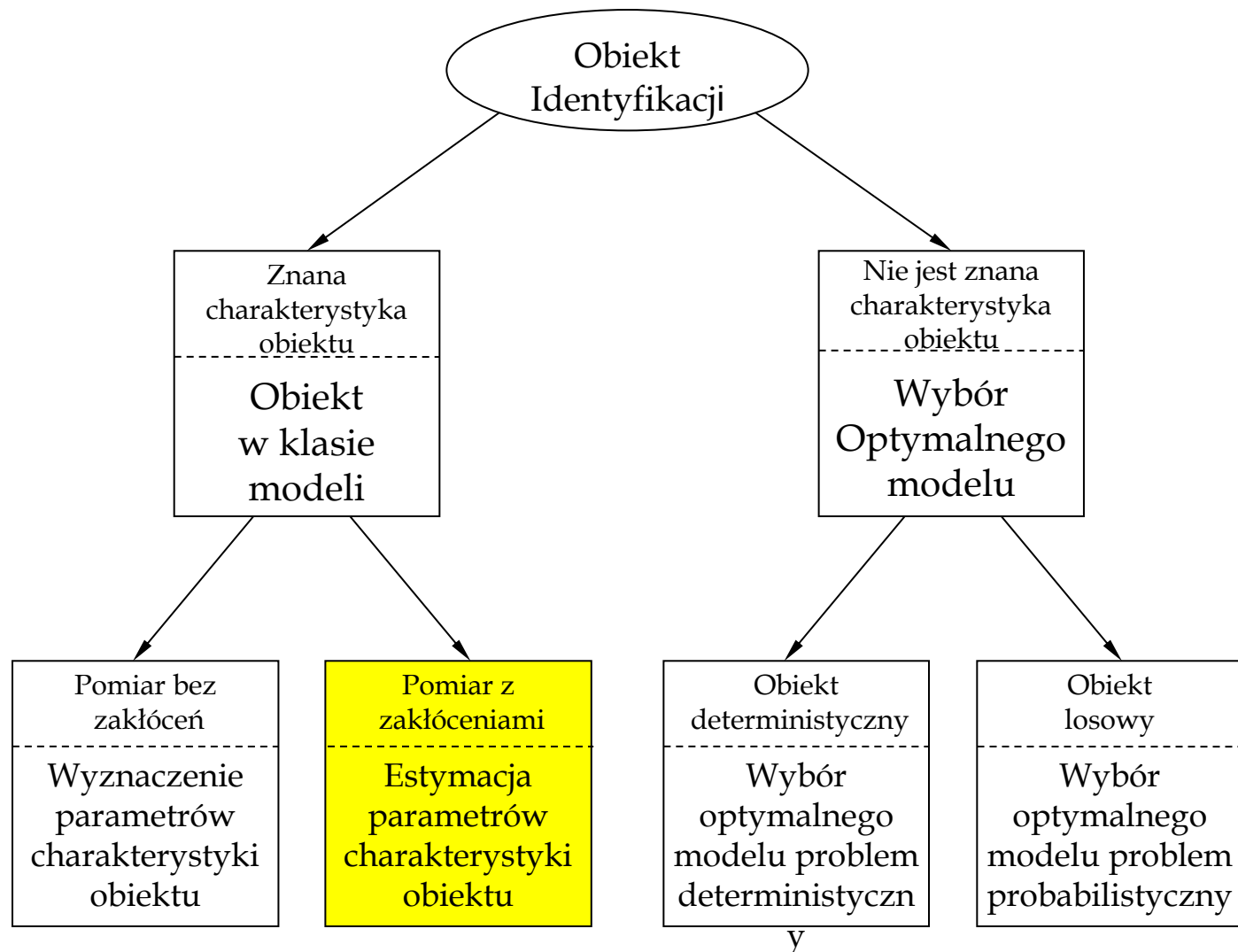
Obiekt w klasie modeli

Przypadek Probabilistyczny

33

Estymacja parametrów modelu

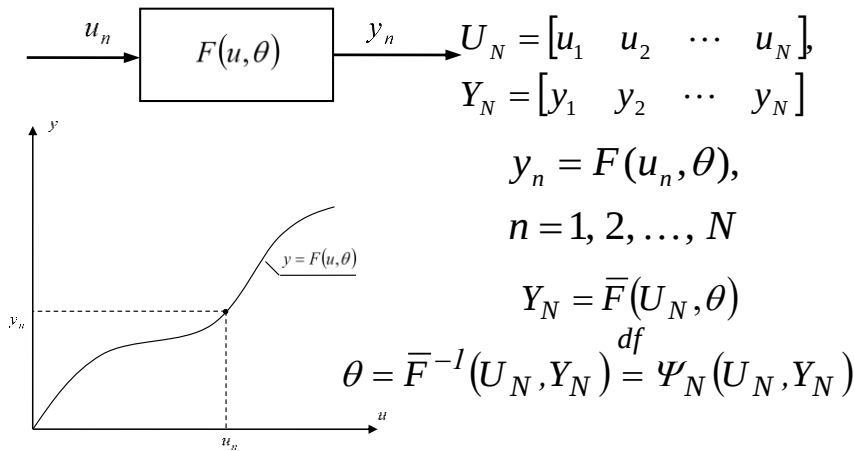
Typowe zadania identyfikacji



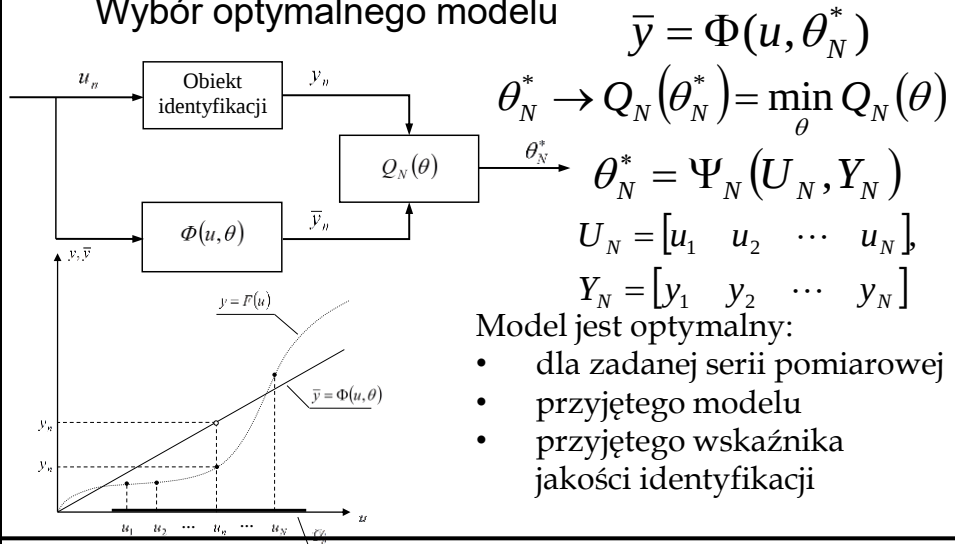
Podstawowe zadania identyfikacji podsumowanie

Obiekt w klasie modeli

D
e
t
e
r
m
i
n
i
s
t
y
c
z
n
y



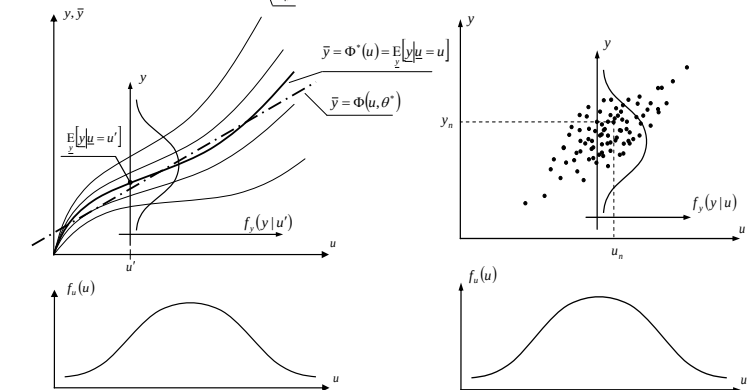
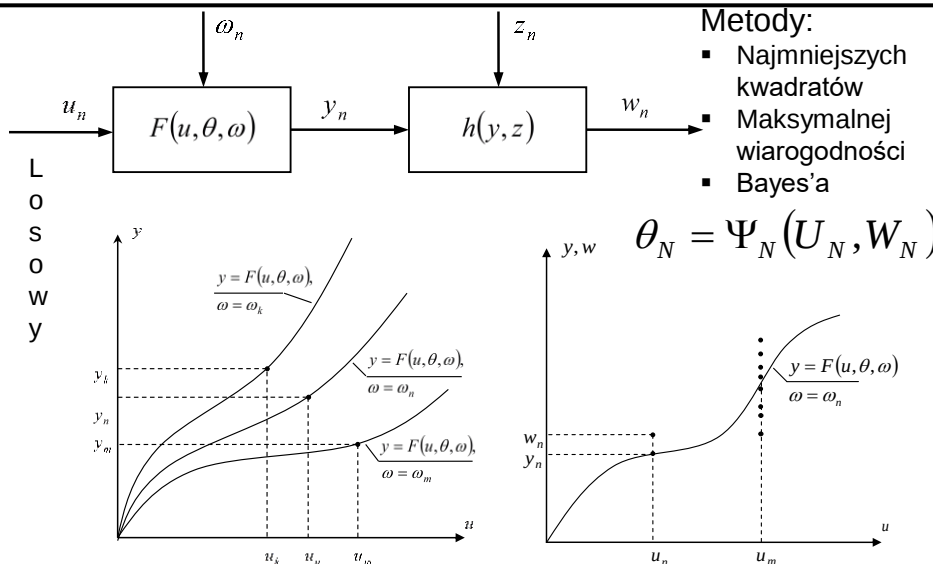
Wybór optymalnego modelu



Metody:

- Najmniejszych kwadratów
- Maksymalnej wiarygodności
- Bayes'a

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$$



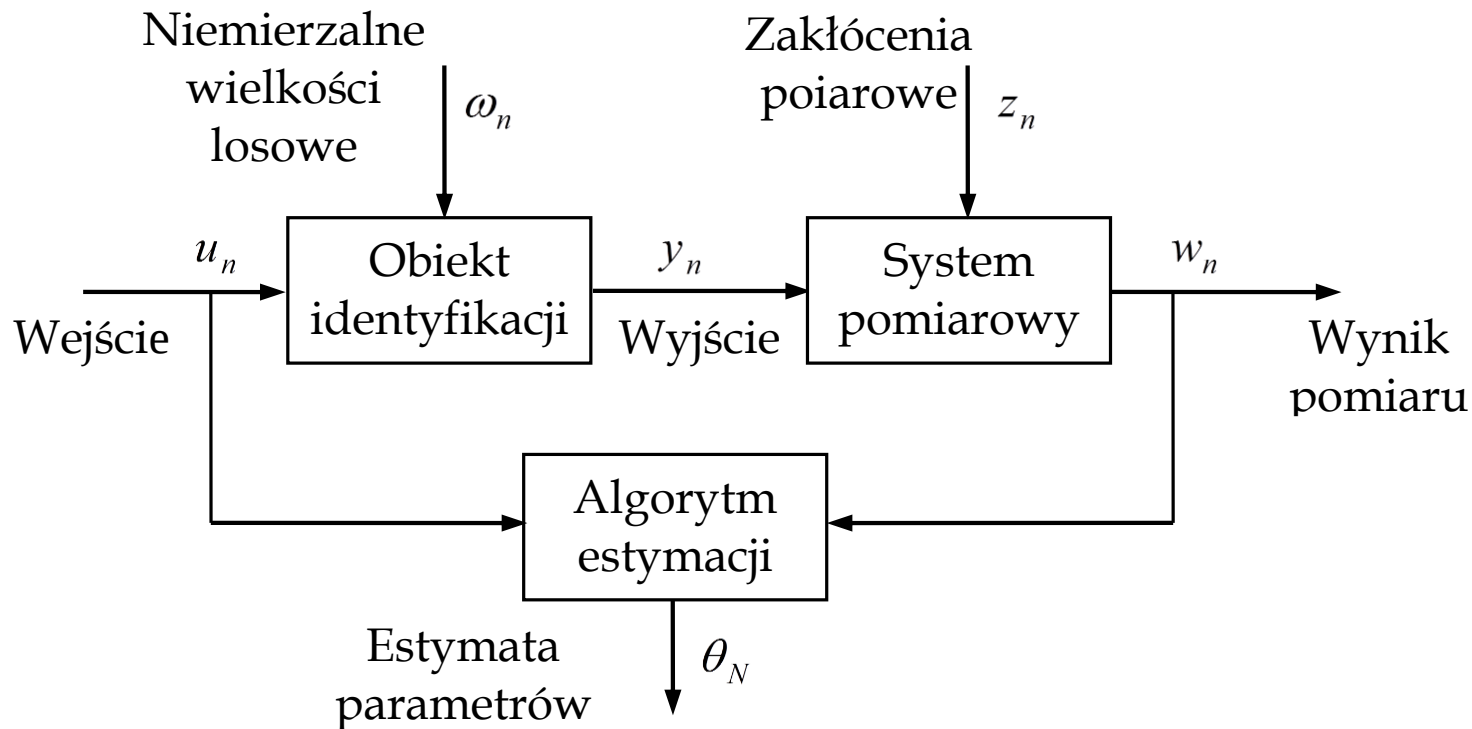
Pełna informacja

- Regresja I rodzaju
- Regresja II rodzaju

Niepełna informacja

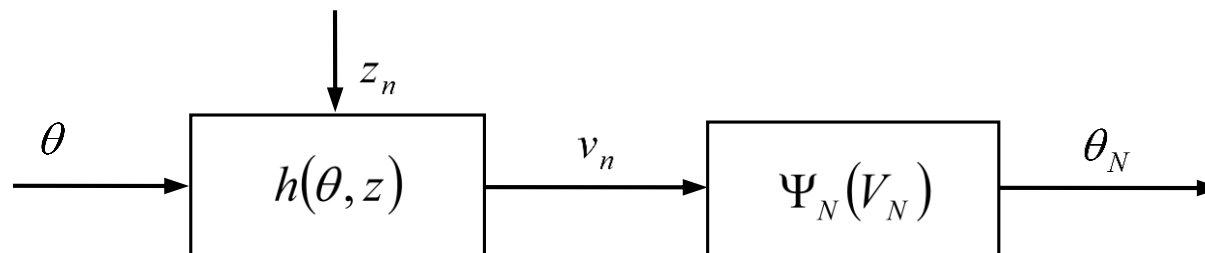
- Estymacja wskaźnika jakości
- Estymacja parametrów rozkładu
- Estymacja rozkładu

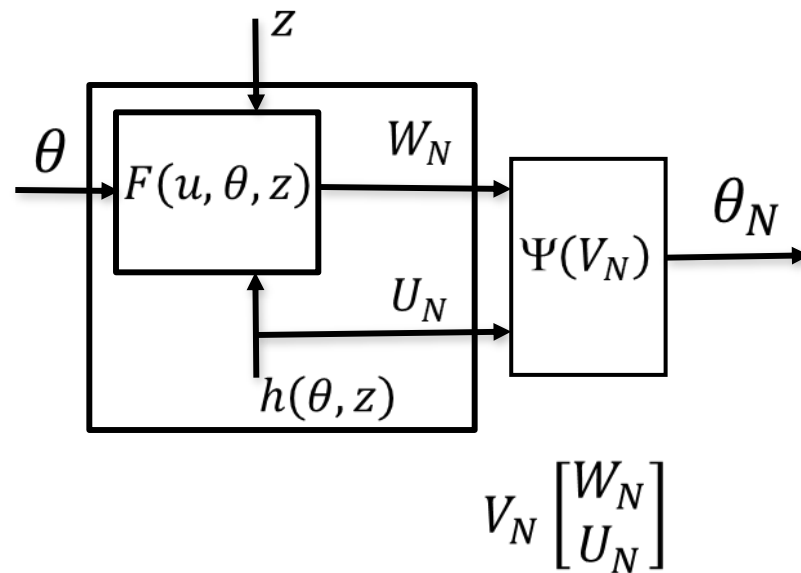
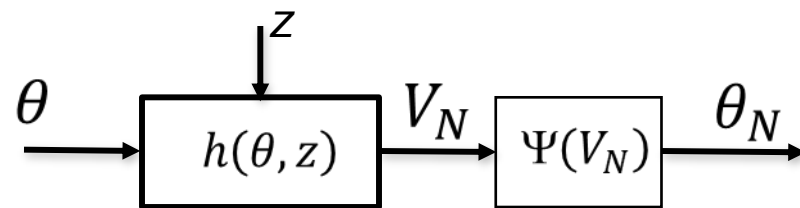
Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

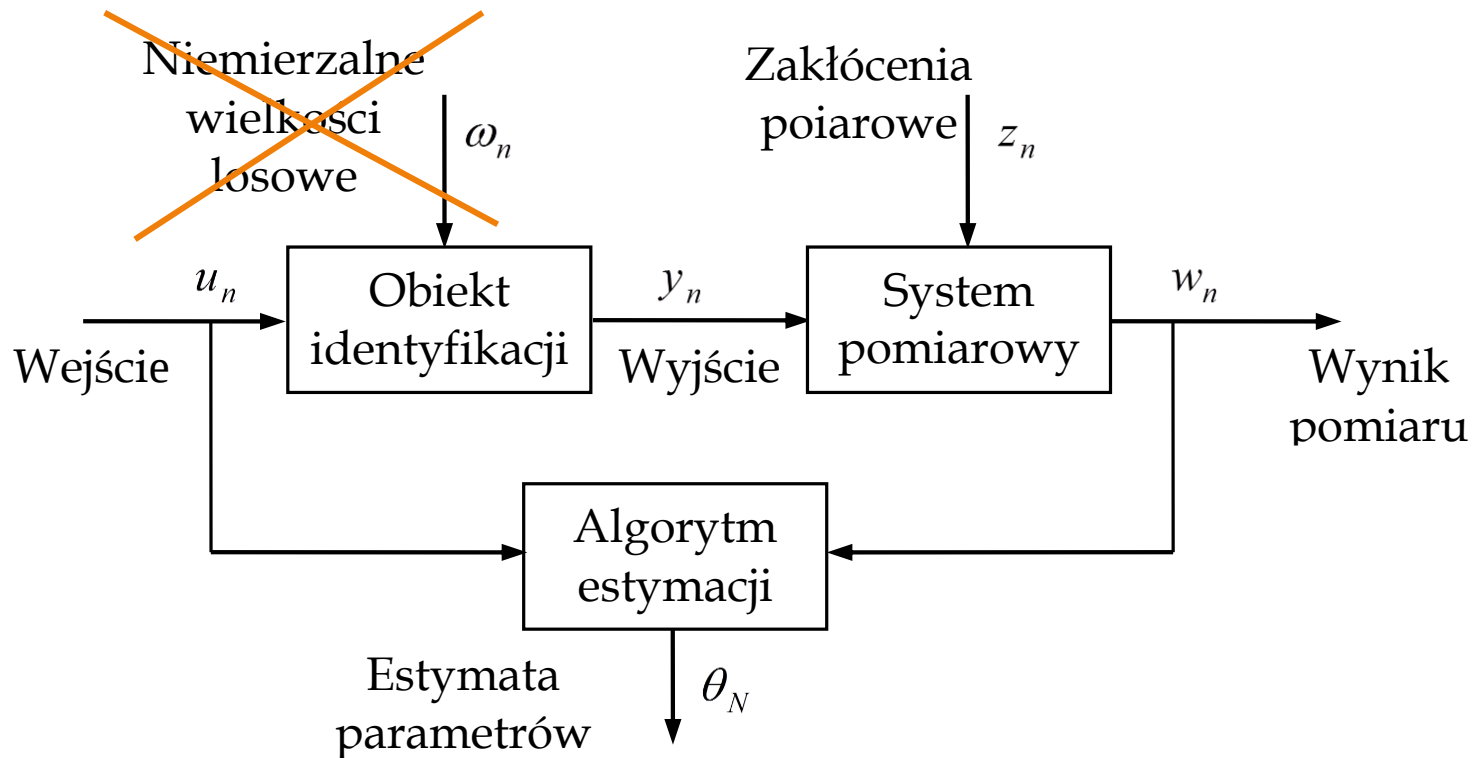
∞ Zakłócony pomiar wielkości fizycznej





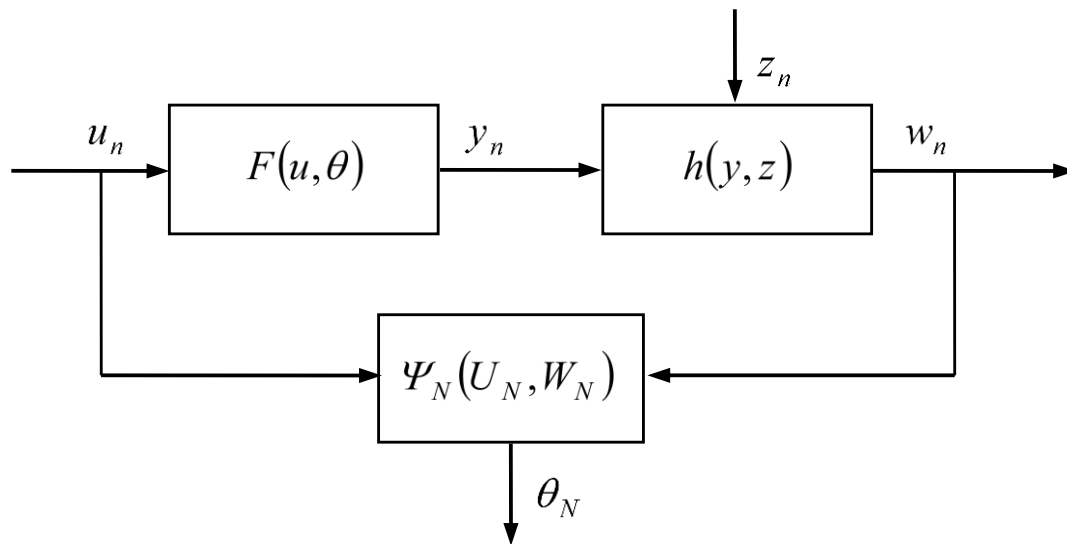
Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

Niemierzalny losowy parametr w obiekcie oraz zakłócony pomiar wyjścia



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

∞ Obiekt deterministyczny, zakłócony pomiar wyjścia



gdzie:

$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]$$

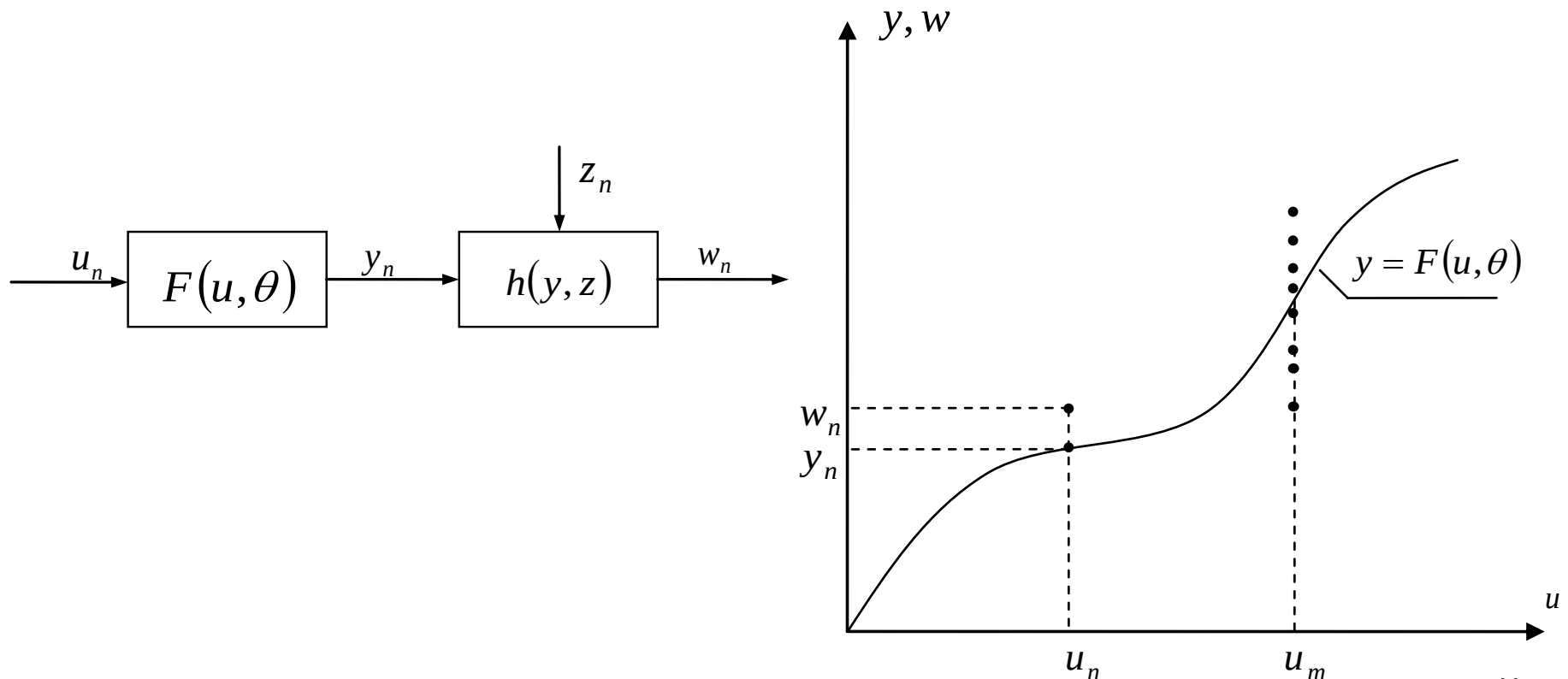
$$W_N = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N]$$

Ψ_N - algorytm estymacji

θ_N - estymata parametru θ

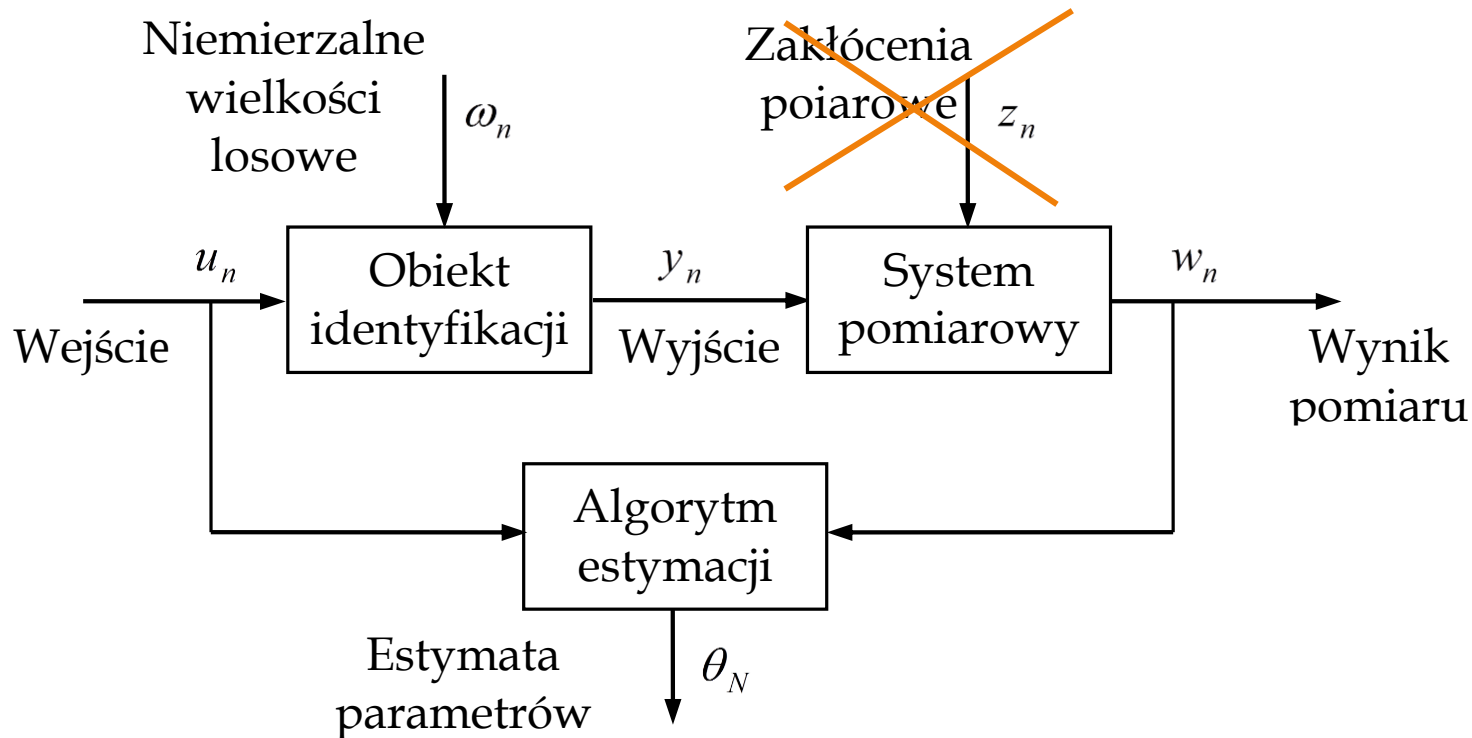
Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

∞ Pomiar wyjścia obiektu z zakłóceniami pomiarowymi



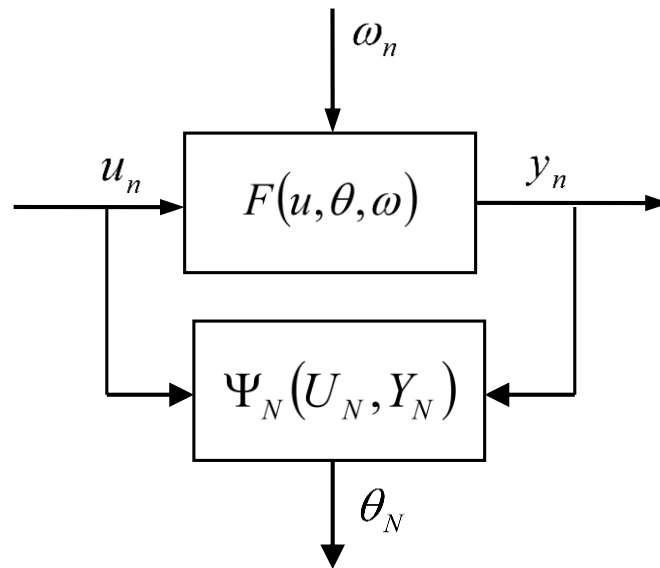
Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

Niemierzalny losowy parametr w obiekcie oraz zakłócony pomiar wyjścia



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

∞ Niemierzalny losowy parametr w obiekcie



gdzie:

$$U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]$$

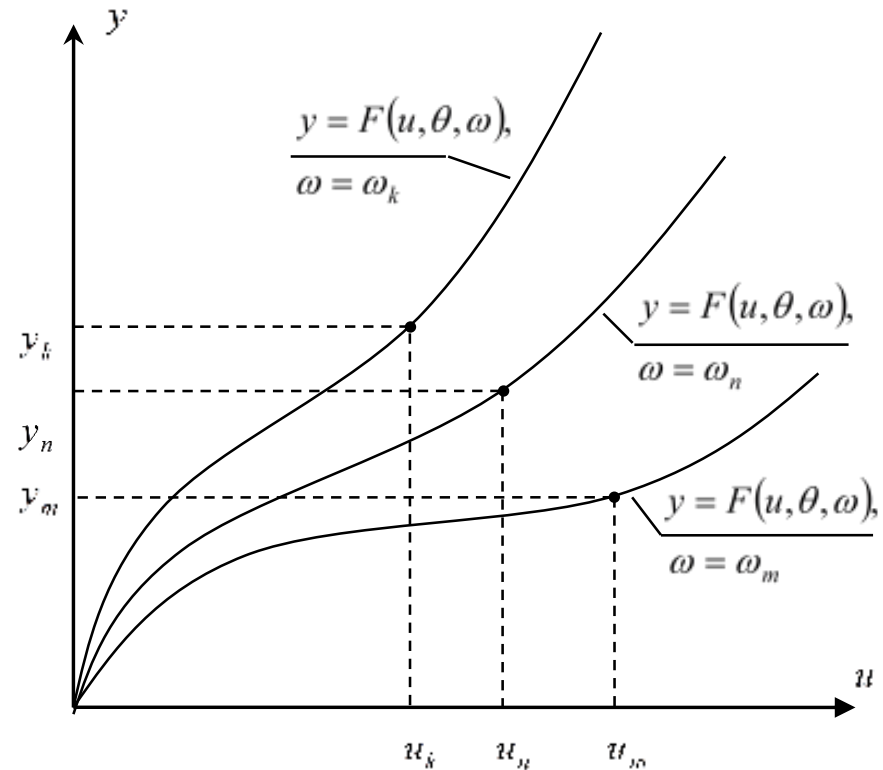
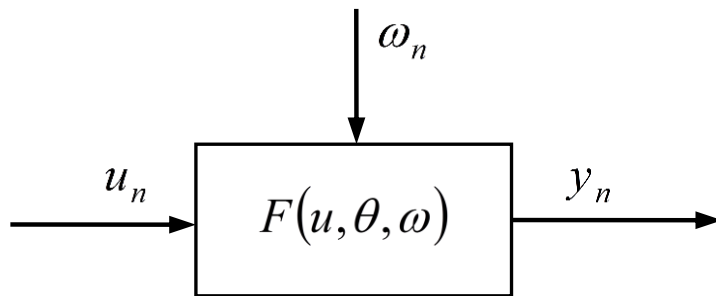
$$Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$$

Ψ_N – algorytm estymacji

θ_N – estymata parametru θ

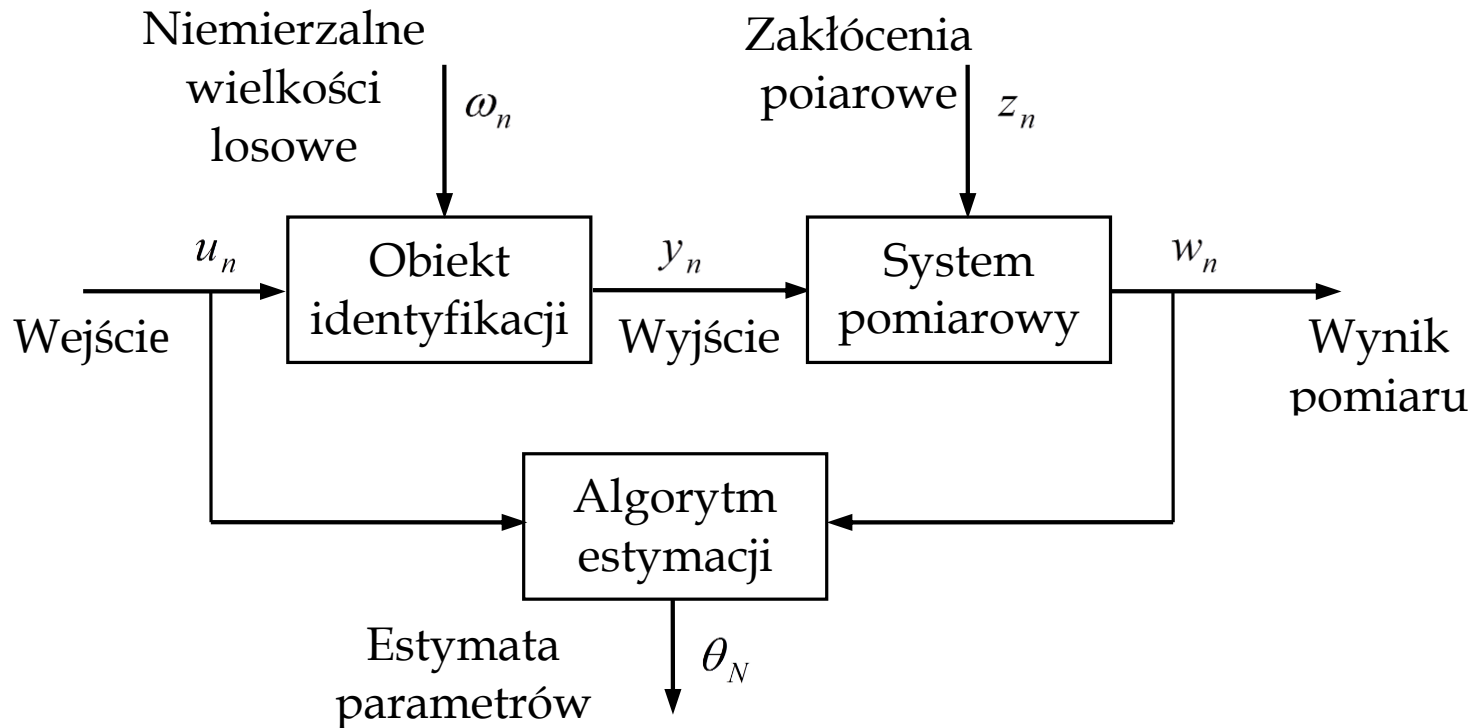
Niemierzalny losowy parametr obiektu

∞ Pomiar z obiektu z losowo zmiennym parametrem



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

Niemierzalny losowy parametr w obiekcie oraz zakłócony pomiar wyjścia

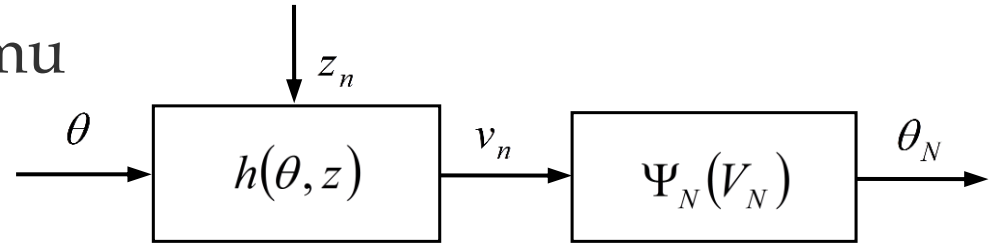


Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ 46 ∞

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Opis systemu pomiarowego: $v = h(\theta, z)$

gdzie: $v \in \mathcal{V}$, h - znana funkcja, wzajemnie jednoznaczna względem z

$$h: \Theta \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V}, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v)$$

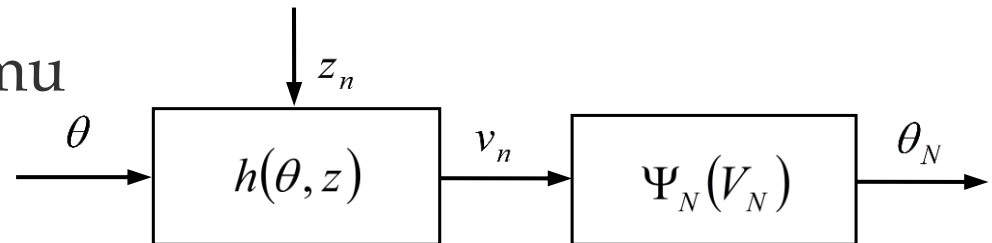
Przykłady funkcji h : $v = h(\theta, z) = \theta + z$

$$v = h(\theta, z) = \theta \cdot z$$

$\mathcal{V}$ - przestrzeń pomiarów($\dim \theta = \dim z = L$)

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n – wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

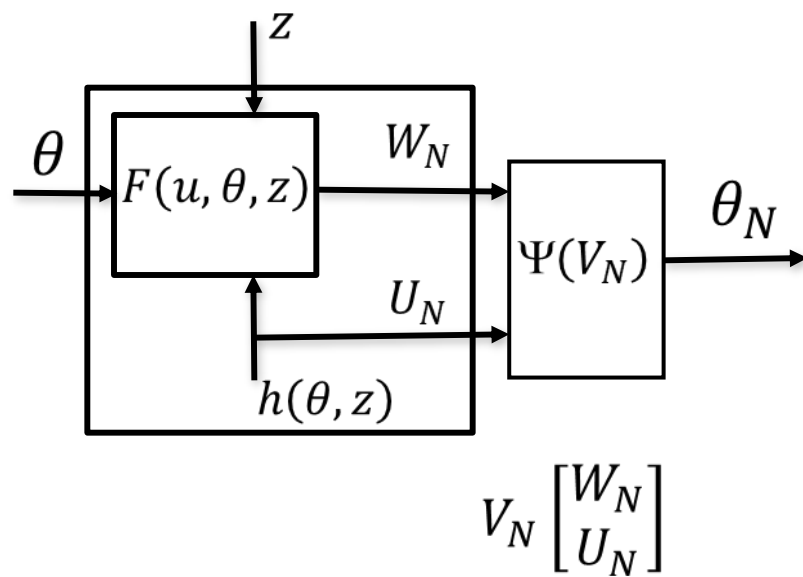
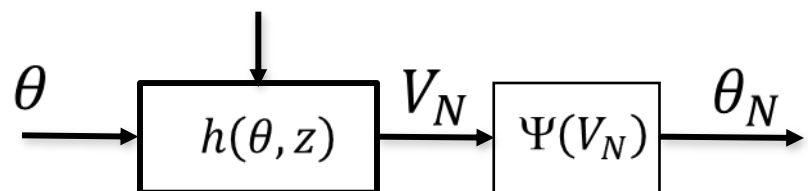
$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]$

z



Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

Poszukujemy algorytmu estymacji:

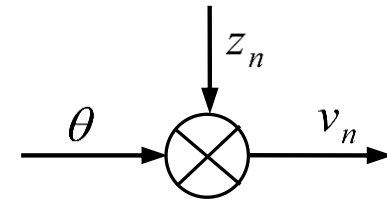
$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

∞ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

Metoda najmniejszych kwadratów

Założenia:



$v = h(\theta, z) = \theta + z$ - zakłócenia addytywne

$E[\underline{z}] = 0$ - wartość oczekiwana zakłóceń wynosi zero

$Var[\underline{z}] < \infty$ - skończona wariancja zakłóceń

Empiryczna wariancja zakłóceń:

$$Var_{zN}(V_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_n - \theta)^2$$

Algorytm estymacji otrzymujemy minimalizując empiryczną wariancję zakłóceń:

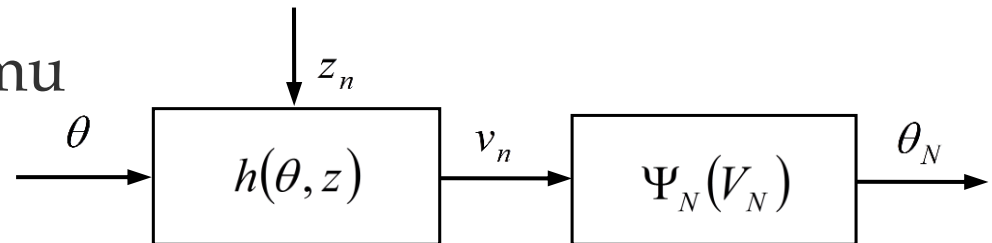
$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow Var_{zN}(V_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{zN}(V_N, \theta)$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n - wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

$f_z(z)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ - system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją h , wzajemnie jednoznaczłą względem z

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]$

Metoda maksymalnej wiarygodności

x - Zmienna losowa

$f_x(x, \theta)$ - Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

θ - Nieznany parametr funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

$[x_1, x_2, \dots, x_N] \triangleq X_N$ - Ciąg niezależnych obserwacji zmiennej losowej

$L(X_N, \theta) \triangleq \prod_{n=1}^N f_x(x_n, \theta)$ - Funkcja wiarygodności

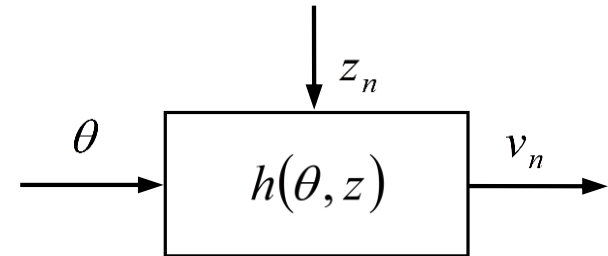
θ_N - Estymator nieznanego parametru θ

$$\theta_N = \Psi(X_N) \rightarrow L(X_N, \theta_N) = \max_{\theta} L(X_N, \theta)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Założenia:

$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją h , wzajemnie jednoznaczłą względem $\underline{z}$



Postać funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z)$ jest znana

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej $\underline{v}$

$$f_v(v, \theta) = f_z(h_z^{-1}(\theta, v)) \cdot |J_h|, \quad \text{gdzie: } J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v}$$

gdzie: J_h - Jacobian, macierz przekształcenia odwrotnego.

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_N]$

Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^N f_v(v_n, \theta) = \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|,$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku maksymalizacji funkcji wiarygodności:

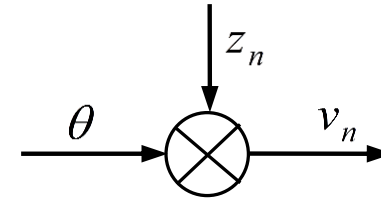
$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow L_N(V_N, \theta_N) = \max_{\theta \in \Theta} L_N(V_N, \theta)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład 1

Charakterystyka systemu pomiarowego:

$$v = h(\theta, z) = \theta + z$$



Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$v = h(a, z) = a + z$$

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = v - \theta$$

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv}(v - \theta) = 1$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

☞ Przykład 1

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa :

$$f_v(v, \theta) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(v - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right] \cdot |1|$$

Funkcja wiarygodności:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(v_n - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

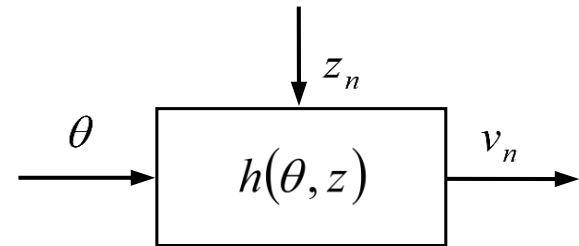
$$L_N(V_N, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[\sum_{n=1}^N -\frac{(v_n - \theta - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_n - m_z)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład



Opis zakłóceń:
$$f_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } z \notin [0, 1] \end{cases}$$

Opis systemu pomiarowego:
$$v = h(\theta, z) = \theta z \quad (\theta > 0)$$

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = \frac{v}{\theta}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

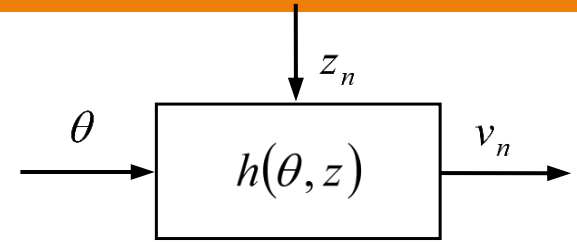
☞ Przykład c.d.

$$z = h_z^{-1}(\theta, v) = \frac{v}{\theta}$$

Macierz Jakobiego:

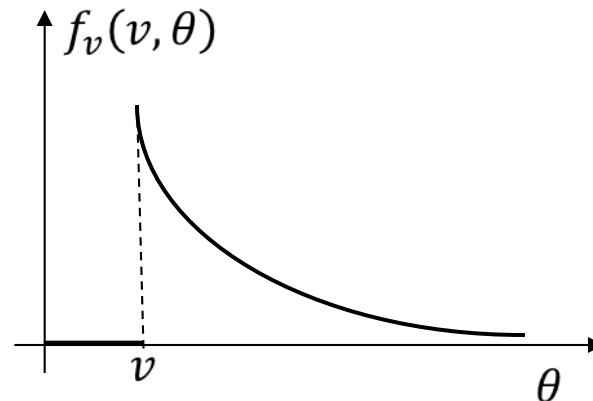
$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta}$$

$$f_v(v, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{for } \frac{v}{\theta} \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } \frac{v}{\theta} \notin [0, 1] \end{cases}$$



Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej:

$$f_v(v, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{for } v \geq \theta \\ 0 & \text{for } v < \theta \end{cases}$$

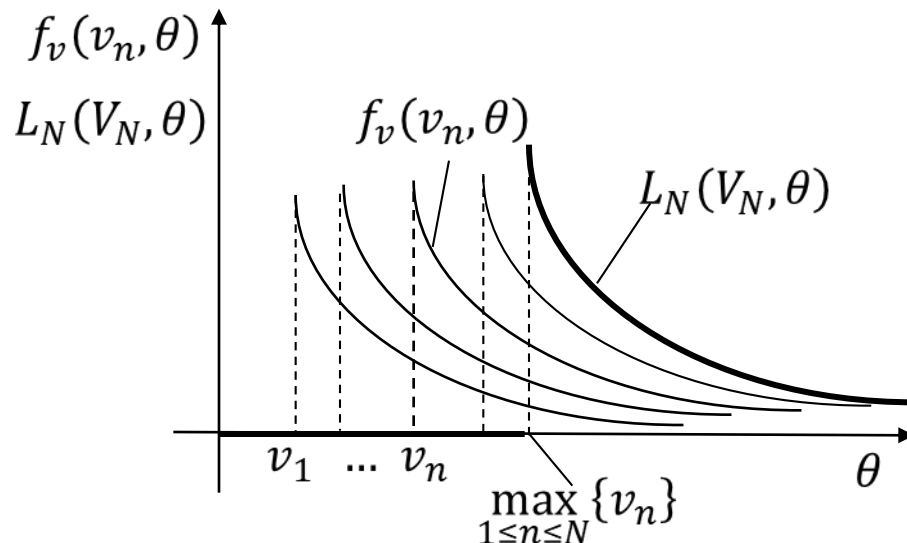
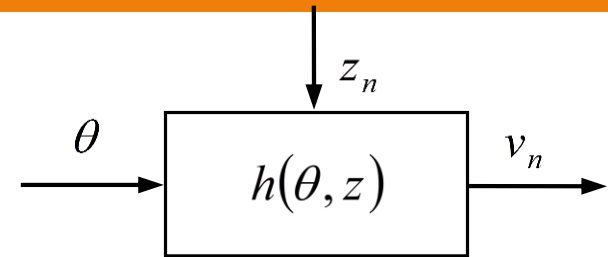


Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład

Funkcja wiarygodności:

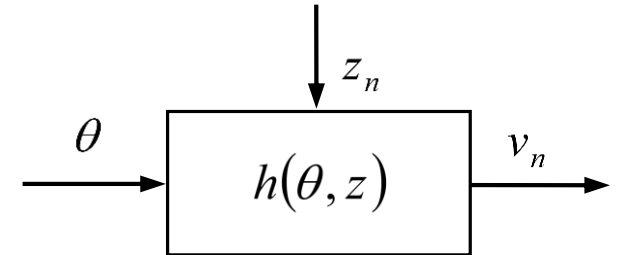
$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^N} & \text{for } \forall n = 1, 2, \dots, N \quad v_n \in [0, \theta] \\ 0 & \text{for } \exists n = 1, 2, \dots, N \quad v_n \notin [0, \theta] \end{cases}$$



$$L_N(V_N, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^N} & \text{for } \theta \geq \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \\ 0 & \text{for } \theta < \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} \end{cases}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład



Algorytm estymacji:

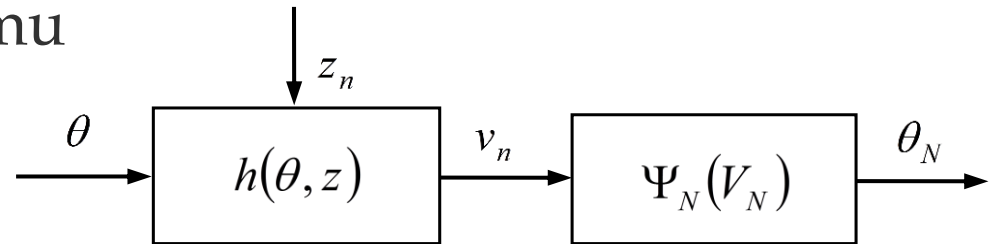
$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\}$$

Interpretacja:

$$\theta_N = \max_{1 \leq n \leq N} \{v_n\} = \max_{1 \leq n \leq N} \{\theta z_n\} = \theta \max_{1 \leq n \leq N} \{z_n\}$$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n – wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

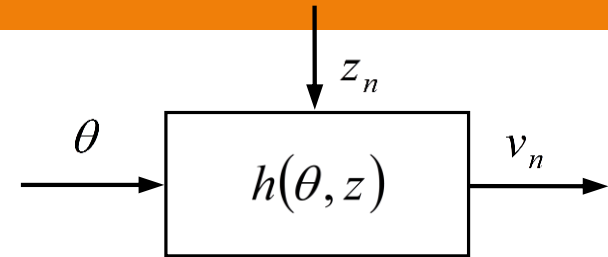
$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]$

Metody Bayes'a



Założenia:

$\underline{v} = h(\underline{\theta}, \underline{z})$ - system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją, wzajemnie jednoznaczłą względem $\underline{z}$

$\underline{\theta}$ - obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\underline{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

Postacie funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_z(\underline{z})$ oraz $f_\theta(\underline{\theta})$ są znane .

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_N]$

$$\bar{\underline{\theta}} = \Psi(V_N)$$

Metody Bayes'a

θ – wartość zmiennej losowej $\boldsymbol{\theta}$

θ – zmienna losowa ciągła – $\theta \in \Xi \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_{\theta}(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

θ – zmienna losowa dykretna – $\theta \in \Xi = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K\}$

$p_k = P(\boldsymbol{\theta} = \theta_k), k = 1, 2, \dots, K$ – gęstość rozkładu
prawdopodobieństwa

$\bar{\theta}$ - możliwa decyzja

$L(\theta, \bar{\theta})$ – funkcja strat, np:

$$L(\theta, \bar{\theta}) \triangleq (\theta - \bar{\theta})^2$$
$$L(\theta, \bar{\theta}) \triangleq |\theta - \bar{\theta}|$$
$$L(\theta, \bar{\theta}) \triangleq -\delta(\theta - \bar{\theta}), \delta_n(\theta - \bar{\theta})$$

$$R(\bar{\theta}) = E_{\theta} \left(L(\theta, \bar{\theta}) \right) \quad - \text{Ryzyko podjęcia decyzji}$$

$$R(\bar{\theta}) = \int_{\Xi} L(\theta, \bar{\theta}) f_{\theta}(\theta) d\theta \quad \text{Dla zmiennej losowej ciągłej}$$

$$R(\bar{\theta}) = \sum_{k=1}^K L(\theta_k, \bar{\theta}) p_k \quad \text{Dla zmiennej losowej dyskretnej}$$

$$\theta^* \rightarrow R(\theta^*) = \min_{\bar{\theta}} R(\bar{\theta}) \quad \text{Decyzja optymalna}$$

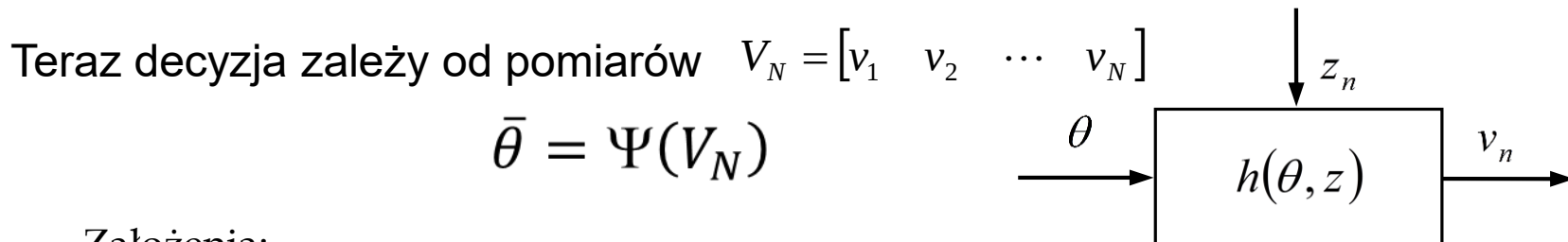
$$\text{Dla: } L(\theta, \bar{\theta}) \triangleq (\theta - \bar{\theta})^2$$

$$R(\bar{\theta}) = \int_{\Xi} (\theta - \bar{\theta})^2 f_{\theta}(\theta) d\theta \rightarrow \theta^* = \int_{\Xi} \theta f_{\theta}(\theta) d\theta = E_{\theta}(\theta)$$

$$\text{Dla: } L(\theta, \bar{\theta}) \triangleq -\delta(\theta - \bar{\theta})$$

$$R(\bar{\theta}) = \int_{\Xi} -\delta(\theta - \bar{\theta}) f_{\theta}(\theta) d\theta = -f_{\theta}(\bar{\theta}) \rightarrow \theta^* \rightarrow \min_{\bar{\theta}} \left(-f_{\theta}(\bar{\theta}) \right) = \max_{\bar{\theta}} f_{\theta}(\bar{\theta})$$

Metody Bayes'a



Założenia:

$\underline{v} = h(\underline{\theta}, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją, wzajemnie jednoznaczłą względem z

$\underline{\theta}$ – obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

Postacie funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_z(z)$ oraz $f_\theta(\theta)$ są znane.

Dana jest funkcja strat $L(\theta, \bar{\theta})$, gdzie $\bar{\theta}$ jest wartością estymaty obserwowanej wielkości.

Ryzyko:
$$R(\bar{\Psi}) \stackrel{df}{=} E_{\underline{\theta}, \underline{V}_N} [L(\underline{\theta}, \underline{\bar{\theta}} = \bar{\Psi}(\underline{V}_N))] = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(V_N)) f(\theta, V_N) d\theta dV_N$$

gdzie: $f(\theta, V_N)$ łączny rozkład prawdopodobieństwa

$$f(\theta, V_N) = f'(\theta|V_N) f''(V_N)$$

gdzie f' jest warunkową, a f'' brzegową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

Metody Bayes'a

Problem: $\Psi_N \rightarrow R(\Psi_N) = \min_{\bar{\Psi}} R(\bar{\Psi})$

$$R(\bar{\Psi}) = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta f''(V_N) dV_N$$

$$r(\bar{\theta}, V_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|V_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta$$

gdzie: r - ryzyko warunkowe

Problem sprowadza się do następującego zadania :

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow r(\theta_N, V_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, V_N)$$

Metody Bayes'a

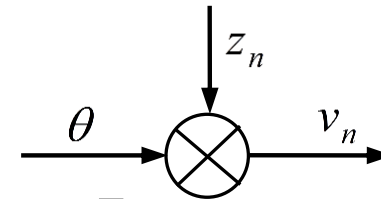
Gdzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori:

$$\begin{aligned}
 f'(\theta|V_N) &= \frac{f_\theta(\theta) f_{VN}(V_N|\theta)}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) f_{VN}(V_N|\theta) d\theta} = \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_v(v_n|\theta)}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_v(v_n|\theta) d\theta} = \\
 &= \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| d\theta} = \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|}{const} \\
 \int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| d\theta &= const \quad \text{dla danej serii pomiarowej } V_N
 \end{aligned}$$

$$f'(\theta|V_N) \propto f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|$$

Metody Bayes'a

Przykład



Opis zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$v = h(\theta, z) = \theta + z, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v) = v - \theta$$

Funkcja strat:

$$L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$$

Metody Bayes'a

Przykład

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v} = \frac{d}{dv} (v - \theta) = 1$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej:

$$f_v(v|\theta) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v - \theta)^2}{2\sigma_z^2}\right] \cdot |1|$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori

$$\begin{aligned} f'(\theta|V_N) &\propto f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h| = \\ &= \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right] \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2}\right] \end{aligned}$$

Metody Bayes'a

∞ Przykład

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori po przekształceniach:

$$\begin{aligned} f'(\theta|V_N) &\propto f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\bar{\theta}, v_n)) |J_h| = \\ &= \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2} \right] \end{aligned}$$

Dla funkcji strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$ ryzyko warunkowe:

$$r(\bar{\theta}, V_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|V_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta = -f'(\bar{\theta}|V_N) \propto$$

$$\propto -f_\theta(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\bar{\theta}, v_n)) |J_h| = -\frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[-\frac{(\bar{\theta} - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(v_n - \bar{\theta})^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Metody Bayes'a

Przykład

W wyniku minimalizacji ryzyka warunkowego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) = \frac{m_\theta + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N v_n}{1 + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 N}$$

Dyskusja:

1° N - mała liczba pomiarów
($\sigma_z \gg \sigma_\theta$) - pomiary bezwartościowe

2° $N \rightarrow \infty$
($\sigma_z \ll \sigma_\theta$) - dobre pomiary

$$\theta_N \approx m_\theta$$

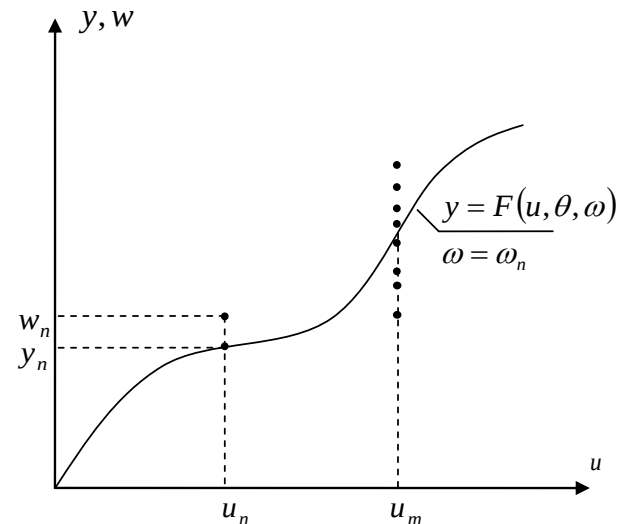
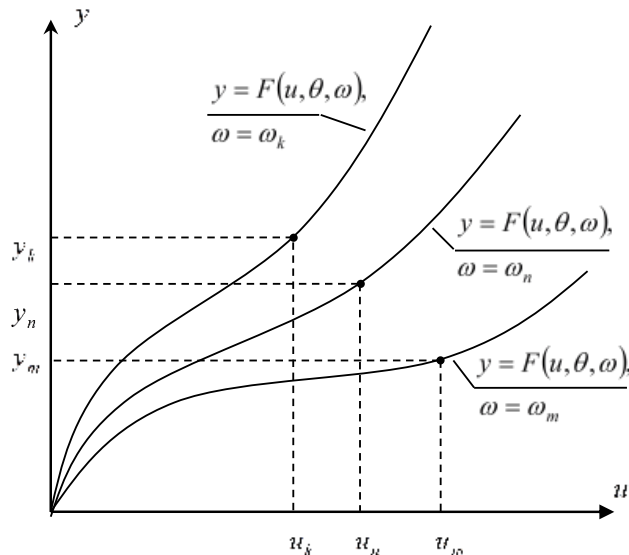
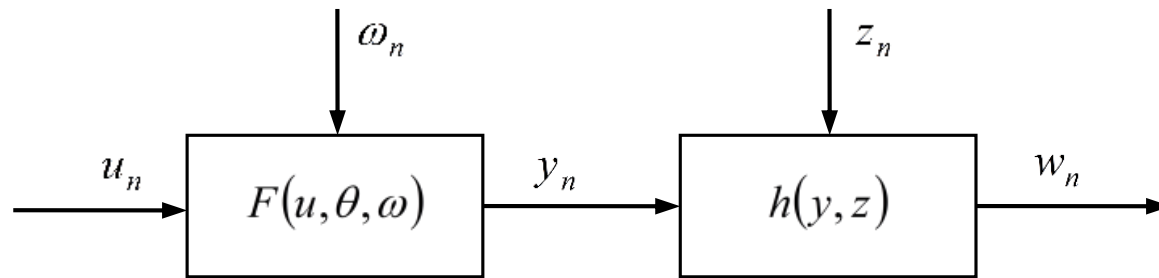
$$\theta_N \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Estymacja parametrów obiektu z zakłóconym pomiarem wyjścia

∞ 73 ∞

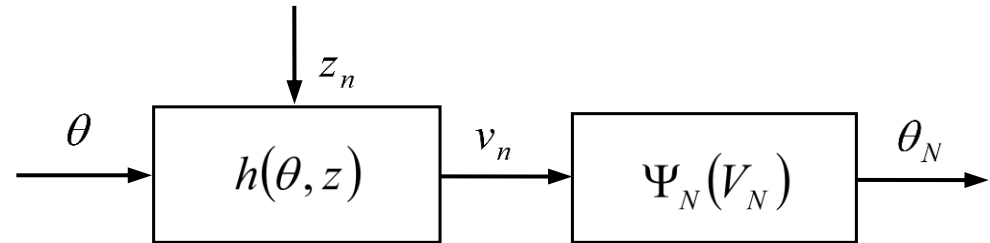
Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu

Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu



Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Przypomnienie



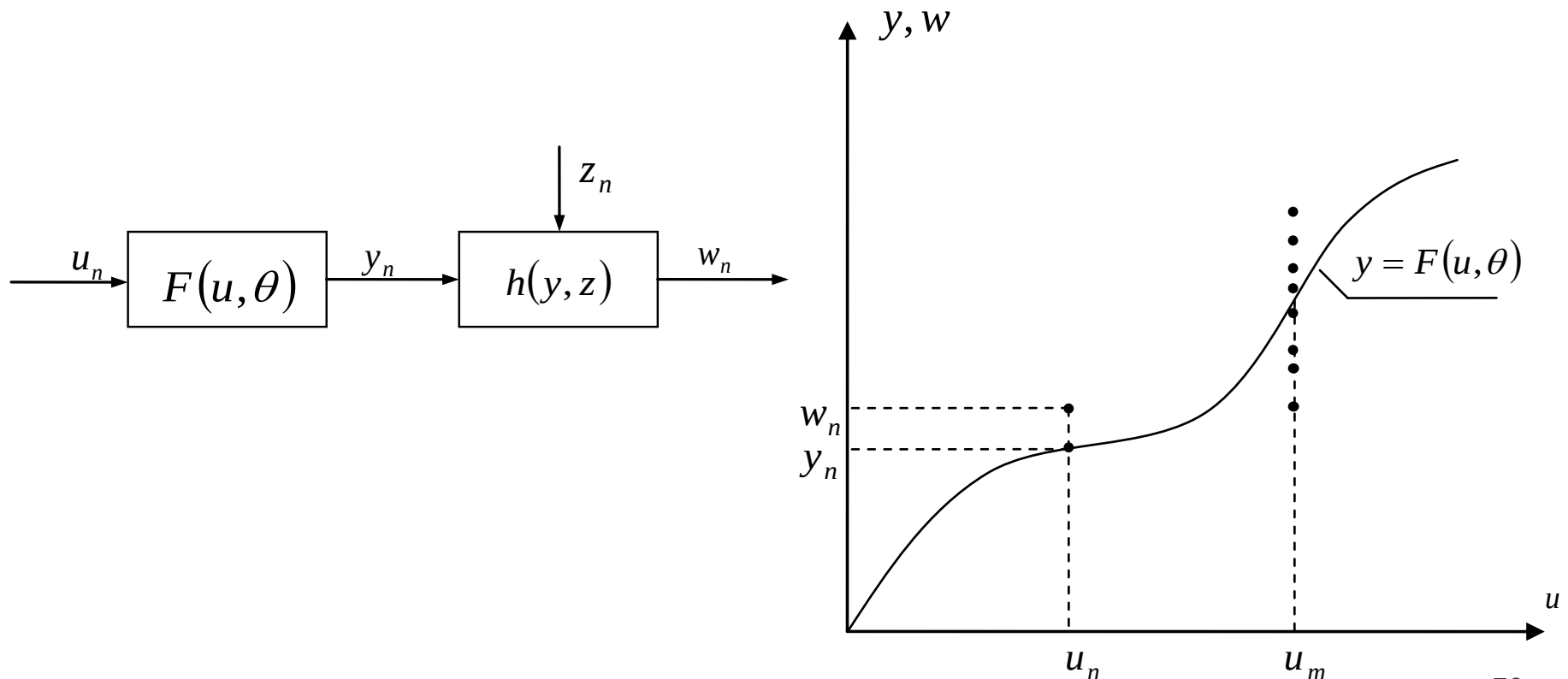
$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

∞ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

∞ Pomiar wyjścia obiektu z zakłóceniami pomiarowymi



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

☞ Sformułowanie problemu

Charakterystyka statyczna obiektu: $y = F(u, \theta)$

Opis systemu pomiarowego: $w = h(y, z)$

gdzie: w – wynik pomiaru $w \in \mathcal{W}$,

h – funkcja wzajemnie jednoznaczna
względem z , $\dim y = \dim z = L$

$h: \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}$, $z = h_z^{-1}(y, w)$

$\mathcal{W}$ – przestrzeń pomiarów

Zakłócenia pomiarowe

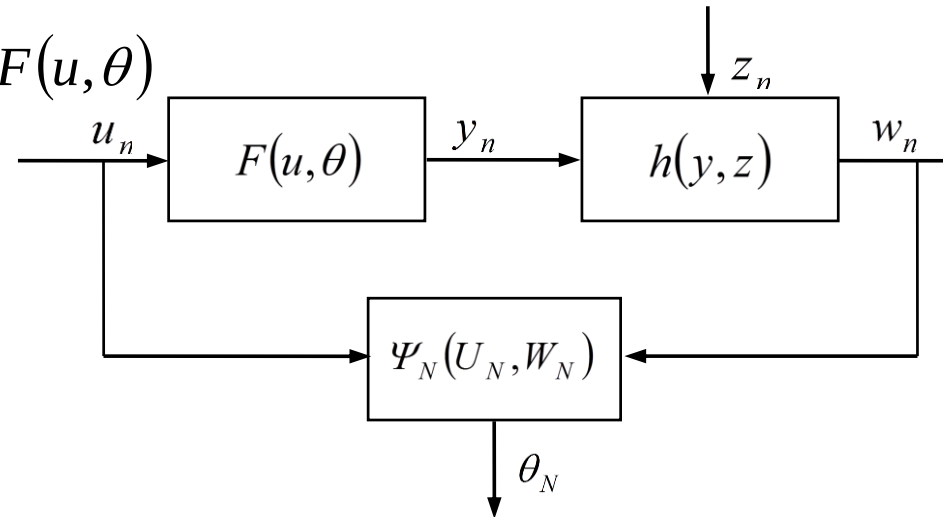
z_n – wartość zmiennej losowej $z \in \mathcal{Z}$ – przestrzeń zakłóceń

$f_z(z)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń

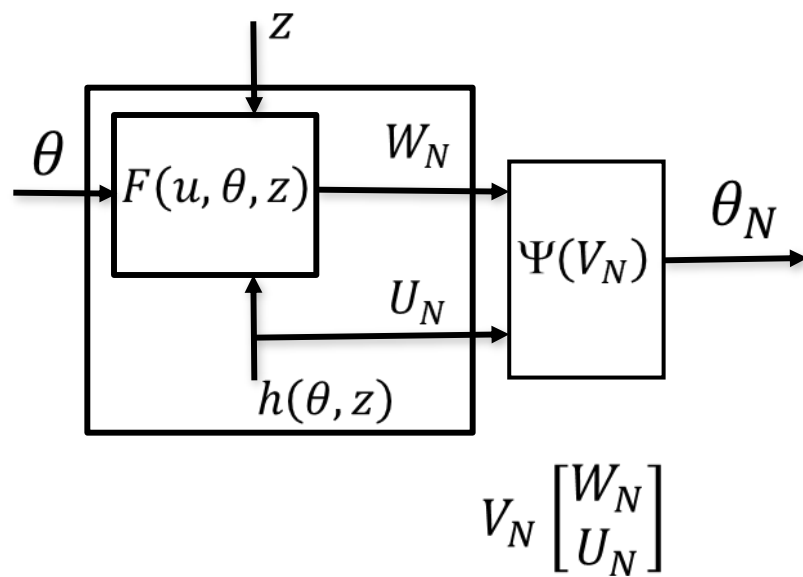
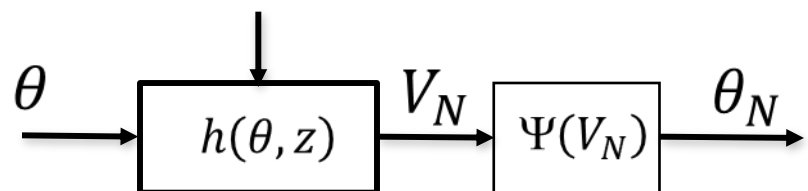
θ – wartość zmiennej losowej $\theta \in \mathcal{A}$ – przestrzeń parametrów

$f_\theta(\theta)$ – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa parametrów

Wyniki pomiarów: $U_N = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]$, $W_N = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]$



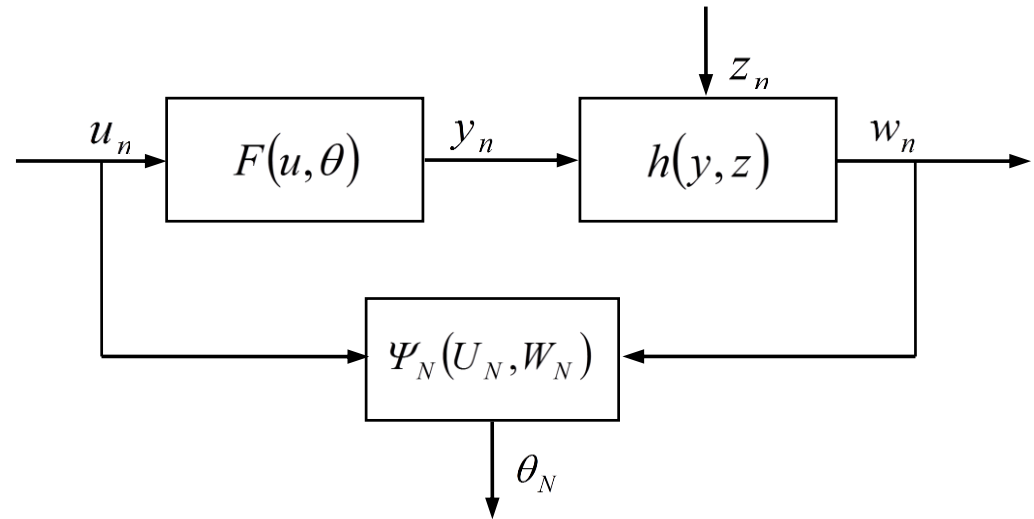
z



Estymacja parametrów charakterystyki statycznej obiektu

Poszukujemy algorytmu

estymacji: $\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$



✧ Możliwe podejścia:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

Metoda najmniejszych kwadratów

**Przypadek jednowymiarowym
wyjściem $L = 1$**

Założenia:

$w = h(y, z) = y + z$ - zakłócenia addytywne

$E[\underline{z}] = 0$ - wartość oczekiwana zakłóceń równa zero

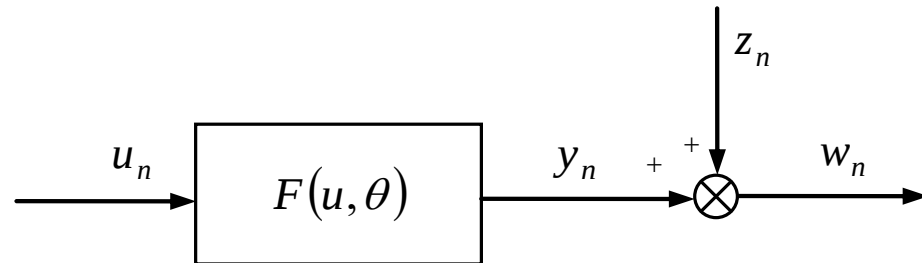
$\text{Var}[\underline{z}] < \infty$ - skończona wariancja zakłóceń

Estymator metodą najmniejszych kwadratów otrzymujemy minimalizując empiryczną wariancję zakłóceń :

$$\text{Var}_{zN}(U_N, W_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (w_n - y_n)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (w_n - F(u_n, \theta))^2$$

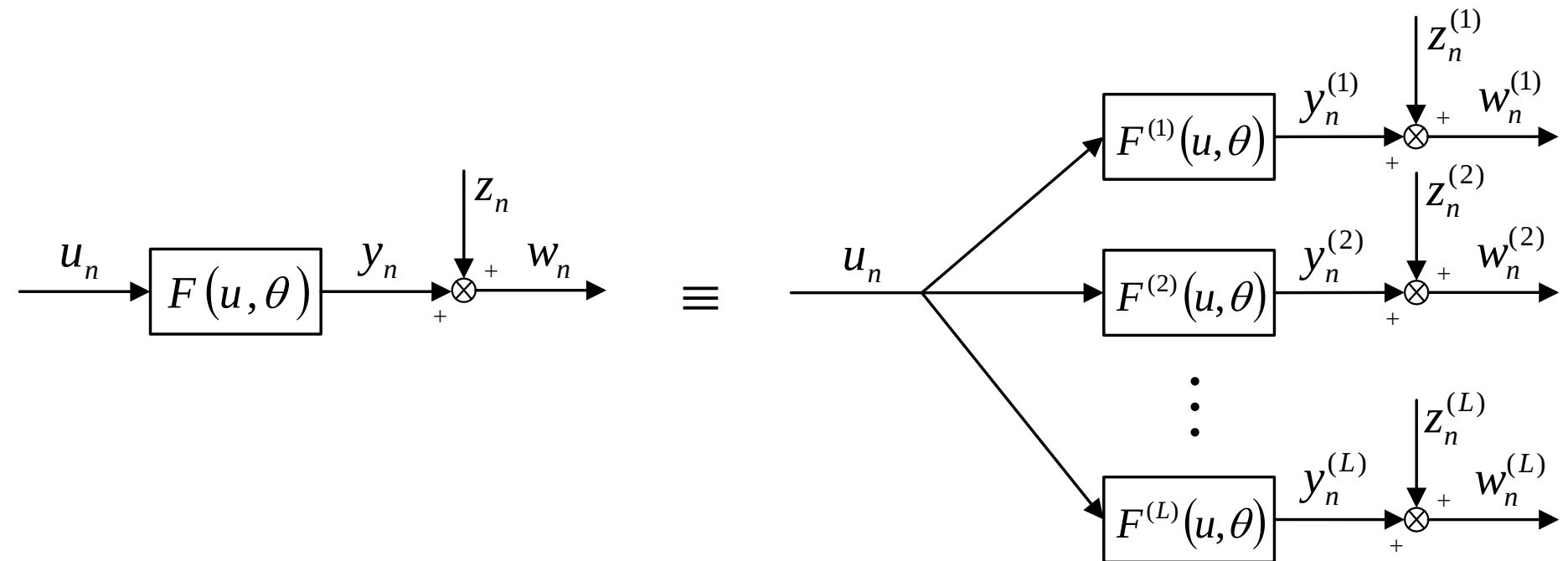
Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku rozwiązania zadania:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) \rightarrow \text{Var}_{zN}(U_N, W_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} \text{Var}_{zN}(U_N, W_N, \theta)$$



Metoda najmniejszych kwadratów

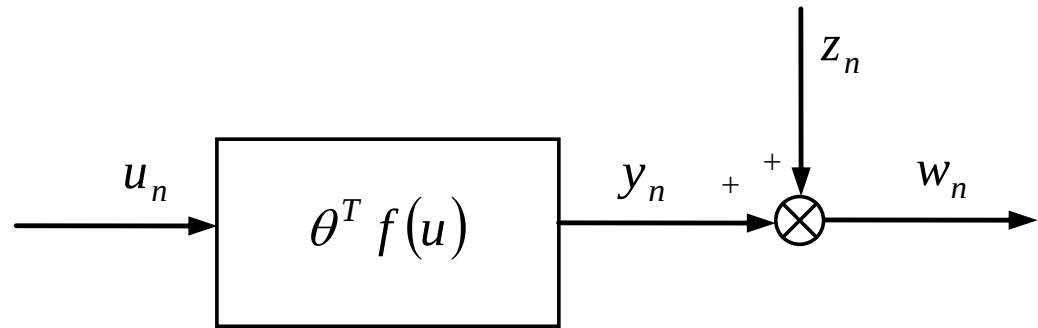
Przypadek z wielowymiarowym wyjściem L dekomponujemy na L zadań z jednowymiarowym wyjściem:



Metoda najmniejszych kwadratów

Przykład

$$y = F(u, \theta) = \theta^T f(u)$$



W rozpatrywanym przykładzie empiryczna wariancja zakłóceń ma postać:

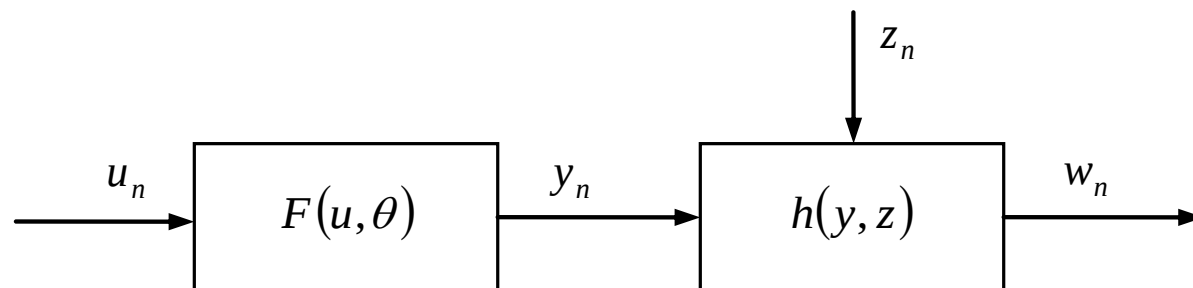
$$\text{Var}_{zN}(U_N, W_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (w_n - y_n)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (w_n - \theta^T f(u_n))^2$$

W wyniku minimalizacji powyższego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) = \left[\sum_{n=1}^N f(u_n) f^T(u_n) \right]^{-1} \sum_{n=1}^N w_n f(u_n)$$

Metoda maksymalnej wiarogodności

Założenia



Charakterystyka statyczna obiektu: $y = F(u, \theta)$ - znana funkcja

z_n - zakłócenia pomiarowe są niezależną wartością zmiennej losowej Z ,
dla której znany jest gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $f_z(\underline{z})$

$\underline{w} = h(\underline{y}, \underline{z})$ - sposób nakładania się zakłóceń na mierzone wyjście opisany jest
funkcją h , która jest wzajemnie jednoznaczna względem zakłóceń

Dla zadanej serii wejść $u_n, n = 1, 2, \dots, N$ otrzymujemy wyniki zakłóconego
pomiaru wyjść $w_n, n = 1, 2, \dots, N$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Zakłócone wyniki pomiarów wyjścia w_n są wartościami zmiennej losowej $\underline{w}$, której funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa należy powiązać z systemem pomiarowym oraz obiektem identyfikacji. Zmienna losowa $\underline{w}$ jest wynikiem przekształcenia zmiennej losowej $\underline{z}$ w systemie pomiarowym z uwzględnieniem charakterystyki obiektu, tj.: $\underline{w} = h(\bar{F}(u, \theta), \underline{z})$, zatem funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{w} - f_w(w, \theta; u)$ wyznaczamy:

$$f_w(w, \theta; u) = f_z(h_z^{-1}(F(u, \theta), w)) \cdot |J_h|$$

gdzie: J_h - macierz Jacobiego $J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(y, w)}{\partial w}$

Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L_N(W_N, \theta; U_N) = \prod_{n=1}^N f_w(w_n, \theta; u_n) = \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta), w_n)) |J_h|$$

W wyniku maksymalizacji funkcji wiarygodności otrzymujemy algorytm estymacji:

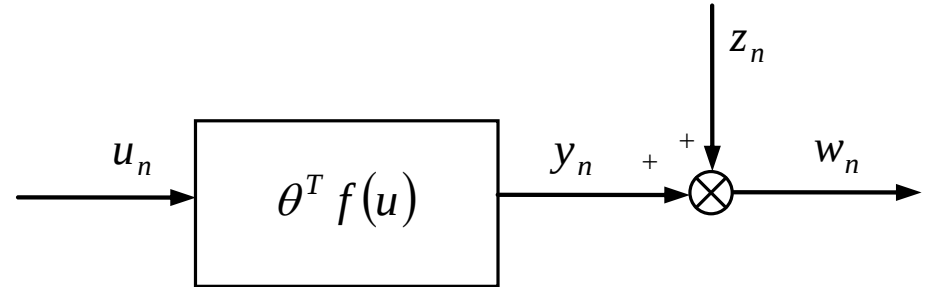
$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) \rightarrow L_N(W_N, \theta_N; U_N) = \max_{\theta \in \Theta} L_N(W_N, \theta; U_N)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład 1

Charakterystyka statyczna obiektu:

$$y = F(u, \theta) = \theta^T f(u)$$



Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$w = h(y, z) = y + z \quad z = h_z^{-1}(F(u, \theta), w) = w - \theta^T f(u)$$

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(F(u, \theta), w)}{\partial w} = \frac{d}{dw} (w - \theta^T f(u)) = 1$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

☞ Przykład 1

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa :

$$f_w(w, \theta; u) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(w - \theta^T f(u) - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right] \cdot |1|$$

Funkcja wiarygodności:

$$L_N(W_N, \theta; U_N) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(w_n - \theta^T f(u_n) - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

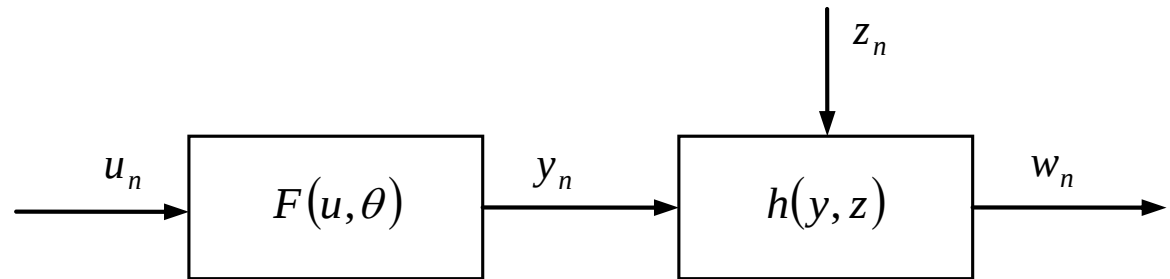
$$L_N(W_N, \theta; U_N) = \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left[\sum_{n=1}^N -\frac{(w_n - \theta^T f(u_n) - m_z)^2}{2\sigma_z^2} \right]$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) = \left[\sum_{n=1}^N f(u_n) f^T(u_n) \right]^{-1} \sum_{n=1}^N (w_n - m_z) f(u_n)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład 2



Charakterystyka statyczna obiektu:

$$y = F(u, \theta) = \theta u \quad (\theta > 0)$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zakłóceń:

$$f_z(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } z \notin [0, 1] \end{cases}$$

Dodatkowe założenie: $\forall n = 1, 2, \dots, N \quad u_n > 0$

Opis systemu pomiarowego:

$$w = h(y, z) = h(F(u, \theta), z) = \theta u z \quad z = h_z^{-1}(F(u, \theta), w) = \frac{w}{\theta u}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

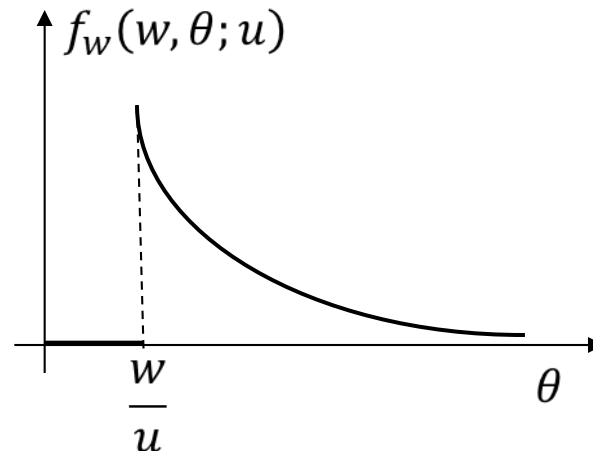
☞ Przykład 2 c.d. $z = h_z^{-1}(F(u, \theta), w) = \frac{w}{\theta u}$

Macierz Jakobiego:

$$J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(F(u, \theta), w)}{\partial w} = \frac{d}{dw} \left(\frac{w}{\theta u} \right) = \frac{1}{\theta u} \quad f_w(w, \theta; u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta u} & \text{for } \frac{w}{\theta u} \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } \frac{w}{\theta u} \notin [0, 1] \end{cases}$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanego wyjścia :

$$f_w(w, \theta; u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta u} & \text{for } \frac{w}{u} \geq \theta \\ 0 & \text{for } \frac{w}{u} < \theta \end{cases}$$

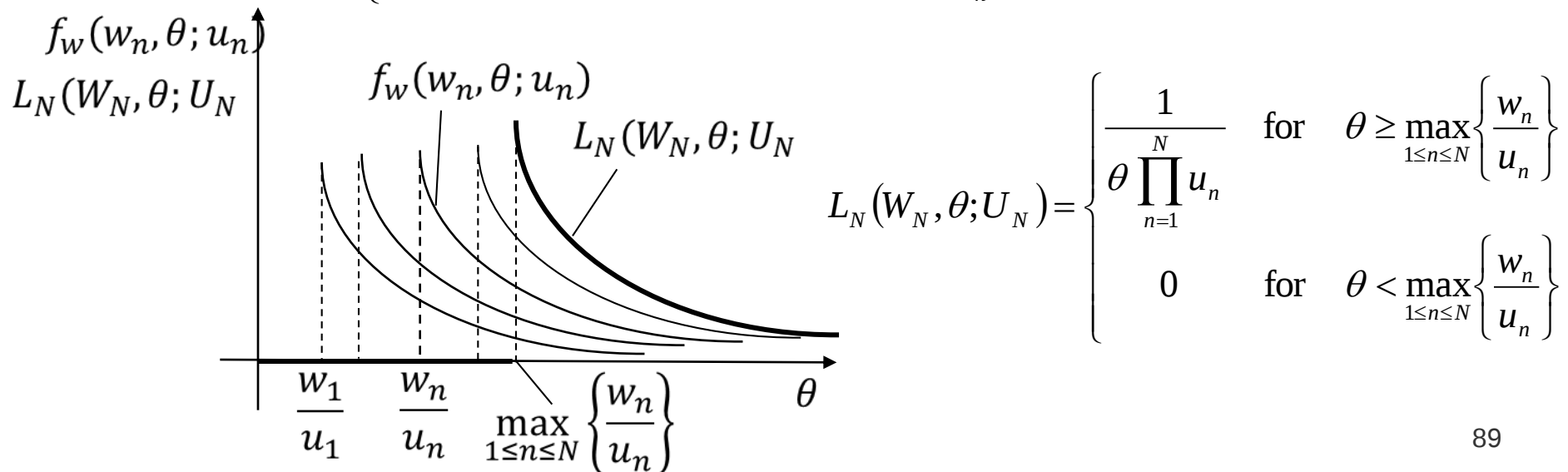


Metoda maksymalnej wiarygodności

Przykład 2

Funkcja wiarygodności:

$$L_N(W_N, \theta; U_N) = \begin{cases} \frac{1}{\theta \prod_{n=1}^N u_n} & \text{for } \forall n = 1, 2, \dots, N \quad \frac{w_n}{u_n} \in [0, \theta] \\ 0 & \text{for } \exists n = 1, 2, \dots, N \quad \frac{w_n}{u_n} \notin [0, \theta] \end{cases}$$



Metoda maksymalnej wiarygodności

∞ Przykład 2

Algorytm estymacji:

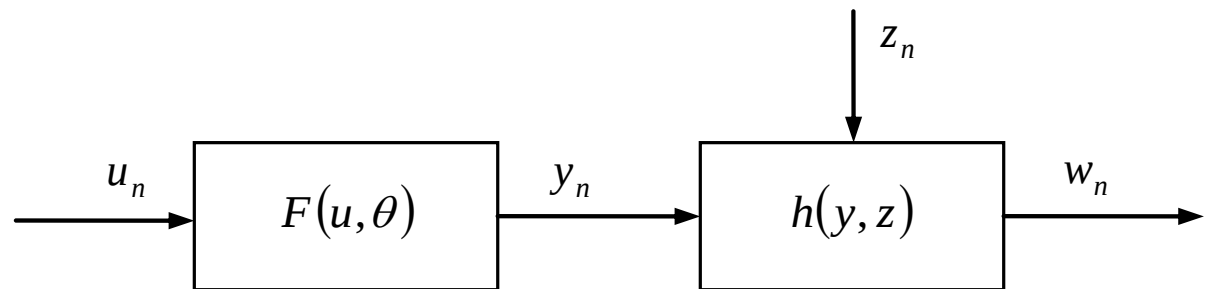
$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) = \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{w_n}{u_n} \right\}$$

Interpretacja:

$$\theta_N = \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{w_n}{u_n} \right\} = \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{\theta u_n z_n}{u_n} \right\} = \theta \max_{1 \leq n \leq N} \{z_n\}$$

Metody Bayes' a

Założenia



Charakterystyka statyczna obiektu: $y = F(u, \theta)$ - znana funkcja

z_n - zakłócenia pomiarowe są niezależną wartością zmiennej losowej $\underline{z}$, dla której znany jest gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $f_z(\underline{z})$

$\underline{w} = h(y, \underline{z})$ - sposób nakładania się zakłóceń na mierzone wyjście opisani jest funkcji h , która jest wzajemnie jednoznaczna względem zakłóceń

θ - wektor parametrów jest wartością zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^R$, dla której funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa - $f_\theta(\theta)$ jest znana, $f_\theta(\theta)$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństwa a' priori

$L(\theta, \bar{\theta})$ - zadana jest funkcja strat

Dla zadanej serii wejść $u_n, n = 1, 2, \dots, N$ otrzymujemy wyniki zakłóconego pomiaru wyjść $w_n, n = 1, 2, \dots, N$

Metody Bayes' a

Ryzyko podjęcia decyzji:

$$R(\bar{\Psi}) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}, \underline{W}_N} [L(\underline{\theta}, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(U_N, \underline{W}_N))] = \int_{\mathcal{W}_N} \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(U_N, W_N)) f(\theta, W_N; U_N) d\theta dW_N$$

gdzie $f(\theta, W_N; U_N)$ jest łączną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa wektora parametrów oraz wyników pomiarów, dla zadanej serii pomiarowej wejść U_N

Należy wyznaczyć algorytm estymacji, który minimalizuje ryzyko, czyli:

$$\Psi_N \rightarrow R(\Psi_N) = \min_{\bar{\Psi}} R(\bar{\Psi})$$

Zauważmy, że $f(\theta, W_N; U_N) = f'(\theta|W_N; U_N) f''(W_N; U_N)$

Metody Bayes' a

Ryzyko podjęcia decyzji przyjmie postać

$$R(\bar{\Psi}) = \int_{\mathcal{W}_N} \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(U_N, W_N)) f'(\theta|W_N; U_N) d\theta f''(W_N; U_N) dW_N$$

Ryzyko warunkowe:

$$r(\bar{\theta}, W_N; U_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|W_N; U_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(U_N, W_N)) f'(\theta|W_N; U_N) d\theta$$

W wyniku minimalizacji powyższego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) \rightarrow r(\theta_N, W_N; U_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, W_N; U_N)$$

Metody Bayes' a

Pozostaje wyznaczyć warunkową gęstość rozkładu prawdopodobieństwa (rozkład prawdopodobieństwa a' posteriori):

zatem:

$$f'(\theta|W_N;U_N) = \frac{f(\theta, W_N; U_N)}{\int_{\Theta} f(\theta, W_N; U_N) d\theta} = \frac{f(\theta, W_N; U_N)}{f''(W_N; U_N)}$$

gdzie:

$$f'(\theta|W_N;U_N) = \frac{f_{\theta}(\theta) f_{WN}(W_N|\theta;U_N)}{f''(W_N;U_N)} = \frac{f_{\theta}(\theta) f_{WN}(W_N|\theta;U_N)}{\int_{\Theta} f_{\theta}(\theta) f_{WN}(W_N|\theta;U_N) d\theta}$$

$$f_{WN}(W_N|\theta;U_N) = \prod_{n=1}^N f_w(w_n|\theta;u_n)$$

Biorąc pod uwagę charakterystykę obiektu oraz opis systemu pomiarowego obserwowana zmienna losowa ma postać: $\underline{w} = h(F(u, \theta), \underline{z})$

Warunkowy rozkład obserwowanej zmiennej losowej wyraża się wzorem:

$$f_w(w|\theta;u) = f_z(h_z^{-1}(F(u, \theta), w)) |J_h|$$

Ostatecznie:

$$f'(\theta|W_N;U_N) = \frac{f_{\theta}(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta), w_n)) |J_h|}{\int_{\Theta} f_{\theta}(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta), w_n)) |J_h| d\theta} \propto f_{\theta}(\theta) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta), w_n)) |J_h|$$

Metody Bayes' a

Metoda średniej a' posteriori

Specjalna postać funkcji strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = [\theta - \bar{\theta}]^T [\theta - \bar{\theta}]$

Ryzyko warunkowe: $r(\bar{\theta}, W_N; U_N) \stackrel{df}{=} E_{\underline{\theta}} \left[[\underline{\theta} - \bar{\theta}]^T [\underline{\theta} - \bar{\theta}] | W_N; U_N \right] =$

$$= E_{\underline{\theta}} \left[\underline{\theta}^T \underline{\theta} | W_N; U_N \right] - 2 \bar{\theta}^T E_{\underline{\theta}} \left[\underline{\theta} | W_N; U_N \right] + \bar{\theta}^T \bar{\theta}$$

W wyniku minimalizacji powyższego, tj.:

$$\left. \text{grad}_{\bar{\theta}} r(\bar{\theta}, W_N; U_N) \right|_{\bar{\theta} = \theta_N} = -2 E_{\underline{\theta}} [\underline{\theta} | W_N; U_N] + 2 \theta_N = 0_N$$

otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) = E_{\underline{\theta}} [\underline{\theta} | W_N; U_N] = \int_{\Theta} \theta f'(\theta | W_N; U_N) d\theta$$

Metody Bayes' a

∞ Metoda maksymalnego prawdopodobieństwa a' posteriori

Specjalna postać funkcji strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$

Ryzyko warunkowe: $r(\bar{\theta}, W_N; U_N) = -\int_{\Theta} \delta(\theta - \bar{\theta}) f'(\theta | W_N; U_N) d\theta = -f'(\bar{\theta} | W_N; U_N)$

Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku maksymalizacji rozkładu prawdopodobieństwa a' posteriori, tj.:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) \rightarrow f'(\theta_N | W_N; U_N) = \max_{\bar{\theta} \in \Theta} f'(\bar{\theta} | W_N; U_N)$$

$$f'(\theta_N | W_N; U_N) \propto f_{\theta}(\theta_N) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta_N), w_n)) | J_h |$$

Ostatecznie $\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N)$ takie, że:

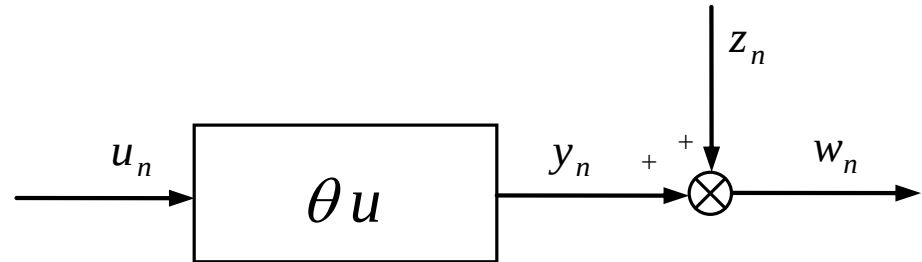
$$f_{\theta}(\theta_N) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta_N), w_n)) | J_h | = \max_{\bar{\theta} \in \Theta} f_{\theta}(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \bar{\theta}), w_n)) | J_h |$$

Metody Bayes' a

∞ Przykład

Charakterystyka statyczna obiektu:

$$y = F(u, \theta) = \theta u$$



Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa a' priori:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\sigma_\theta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

Opis systemu pomiarowego:

$$w = h(y, z) = y + z, \quad z = h_z^{-1}(F(u, \theta), w) = w - \theta u$$

Funkcja strat: $L(\theta, \bar{\theta}) = -\delta(\theta - \bar{\theta})$

Metody Bayes' a

∞ Przykład

Macierz Jakobiego: $J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(F(u, \theta), w)}{\partial w} = \frac{d}{dw} (w - \theta u) = 1$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanego wyjścia:

$$f_w(w|\theta; u) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(w - \theta u)^2}{2\sigma_z^2}\right] \cdot |1|$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa a' posteriori

$$\begin{aligned} f'(\bar{\theta}|W_N; U_N) &\propto f_{\theta}(\bar{\theta}) \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(F(u_n, \theta), w_n)) |J_h| = \\ &= \frac{1}{\sigma_{\theta} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{\theta} - m_{\theta})^2}{2\sigma_{\theta}^2}\right] \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(w_n - \bar{\theta} u_n)^2}{2\sigma_z^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_{\theta} \sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left[-\frac{(\bar{\theta} - m_{\theta})^2}{2\sigma_{\theta}^2} - \sum_{n=1}^N \frac{(w_n - \bar{\theta} u_n)^2}{2\sigma_z^2}\right] \end{aligned}$$

Metody Bayes' a

∞ Przykład

W wyniku maksymalizacji powyższego otrzymujemy algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) = \frac{m_\theta + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N w_n u_n}{1 + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N u_n^2}$$

Dyskusja:

1° N - Mała liczba (kilka pomiarów)
($\sigma_z \gg \sigma_\theta$)

- pomiary mało wartościowe

$$\theta_N \approx m_\theta$$

2° $N \rightarrow \infty$ Duża liczba pomiarów
($\sigma_z \ll \sigma_\theta$) - pomiary dobrej jakości

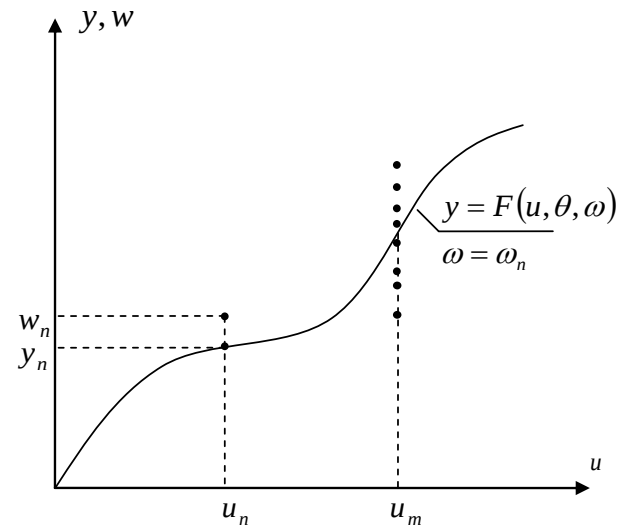
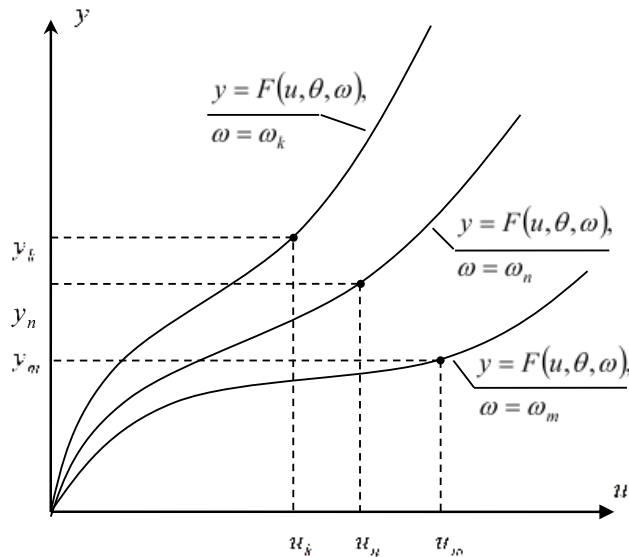
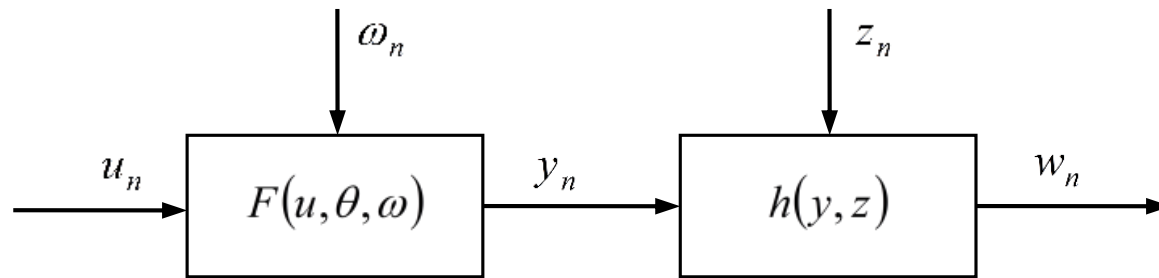
$$\theta_N \approx \frac{\sum_{n=1}^N w_n u_n}{\sum_{n=1}^N u_n^2}$$

Estymacja parametrów obiektu z losową wielkością w obiekcie

∞ 100 ∞

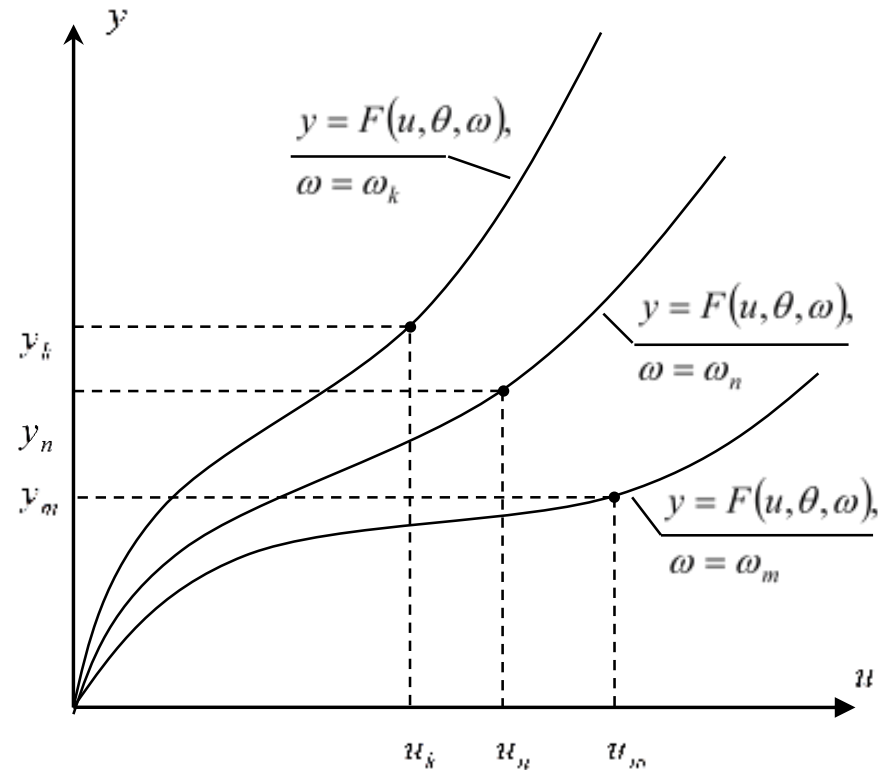
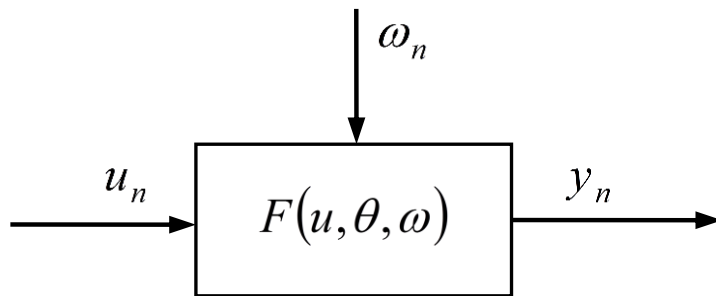
Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu

Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu



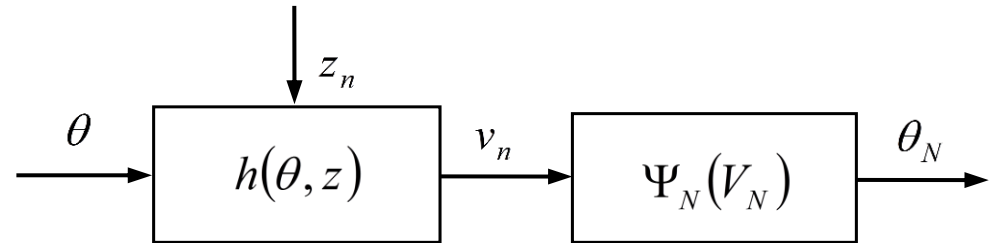
Niemierzalny losowy parametr obiektu

∞ Pomiar z obiektu z losowo zmiennym parametrem



Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Przypomnienie

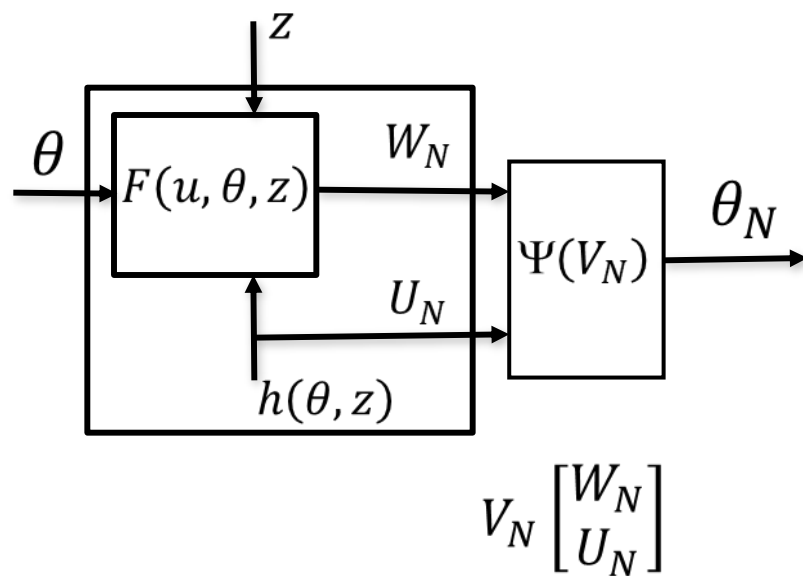
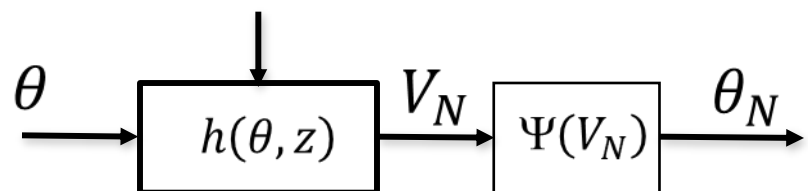


$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

∞ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

z



Niemierzalny losowy parametr obiektu

☞ Sformułowanie problemu

Charakterystyka obiektu: $y = F(u, \theta, \omega)$

Losowy parametr obiektu:

$$\omega \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^L, \quad (\dim y = \dim \omega = L)$$

F - wzajemnie jednoznaczna funkcja względem ω

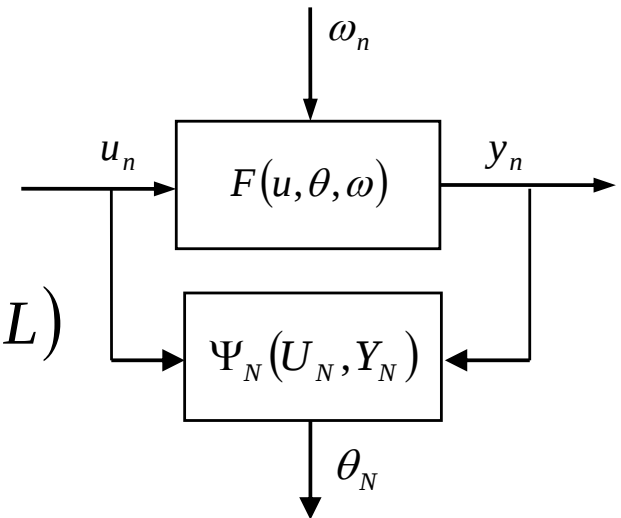
$$\omega = F_{\omega}^{-1}(u, \theta, y)$$

ω_n - wartość zmiennej losowej ω z przestrzeni $\Omega \subseteq \mathcal{R}^L$

Znana funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\omega}(\omega)$

Pomiary: $U_N = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N]$, $Y_N = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]$

Algorytm estymacji: $\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N)$



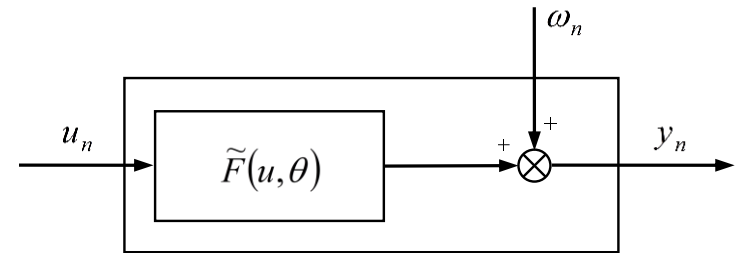
Metoda najmniejszych kwadratów

Założenie:

Charakterystyka obiektu:

$$y = F(u, \theta, \omega) = \tilde{F}(u, \theta) + \omega$$

$$\underset{\omega}{E}[\omega] = 0 \quad \underset{\omega}{Var}[\omega] < \infty$$



Metoda najmniejszych kwadratów minimalizuje empiryczną wariancję

$$Var_{\omega N}(U_N, Y_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - \tilde{F}(u_n, \theta))^2$$

Algorytm estymacji otrzymujemy rozwiązując zadanie:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N) \rightarrow Var_{\omega N}(U_N, Y_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{\omega N}(U_N, Y_N, \theta)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Założenia:

ω_n wartość zmiennej losowej $\underline{\omega}$, z funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\omega}(\omega)$

Dla zadanego wejścia u_n , wyjście $y_n, n = 1, 2, \dots, N$ jest mierzone

Sekwencja $y_n, n = 1, 2, \dots, N$ jest ciągiem wartości zmiennej losowej $\underline{y}$

$$\underline{y} = F(u, \theta, \underline{\omega})$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{y}$

$$f_y(y, \theta; u) = f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u, \theta, y)) \cdot |J_F| \quad \text{gdzie } J_F \text{ jest macierzą Jakobiego}$$
$$J_F = \frac{\partial F_{\omega}^{-1}(u, \theta, y)}{\partial y}$$

Funkcja wiarygodności:

$$L_N(Y_N, \theta; U_N) = \prod_{n=1}^N f_y(y_n, \theta; u_n) = \prod_{n=1}^N f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u_n, \theta, y_n)) |J_F|$$

Estimation algorithm:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N) \rightarrow L_N(Y_N, \theta_N; U_N) = \max_{\theta \in \Theta} L_N(Y_N, \theta; U_N)$$

Metody Bayes'a

Założenia:

Dodatkowo zakładamy, że θ jest wartością zmiennej losowej $\underline{\theta}$,
o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\theta}(\theta)$

$$r(\bar{\theta}, Y_N; U_N) \stackrel{df}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta}) | Y_N; U_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(U_N, Y_N)) f'(\theta | Y_N; U_N) d\theta$$
$$f_y(y | \theta; u) = f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u, \theta, y)) |J_F|$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori :

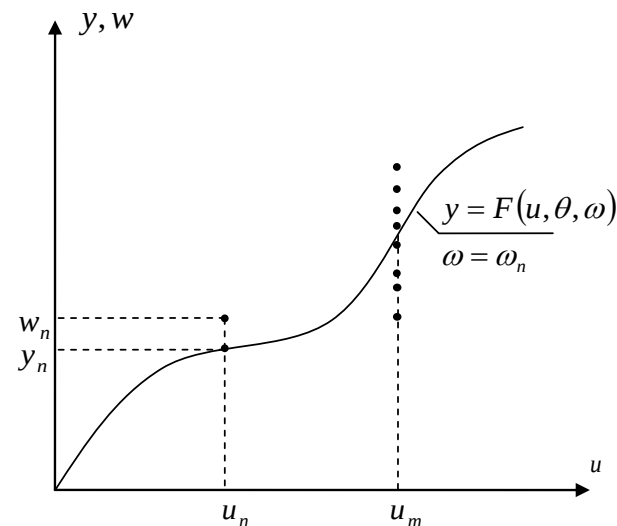
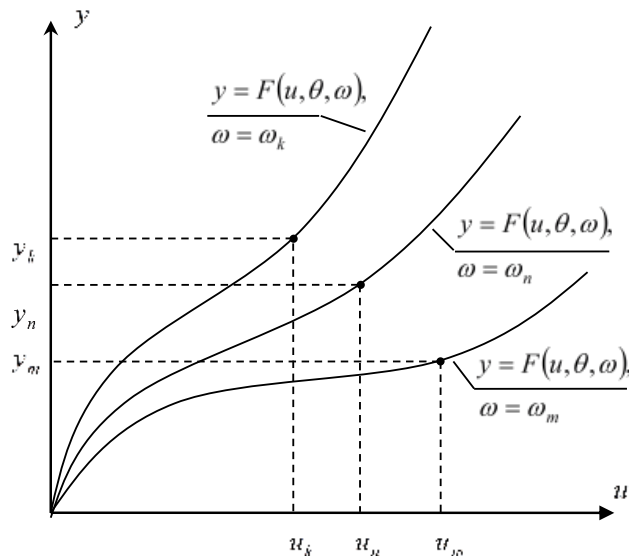
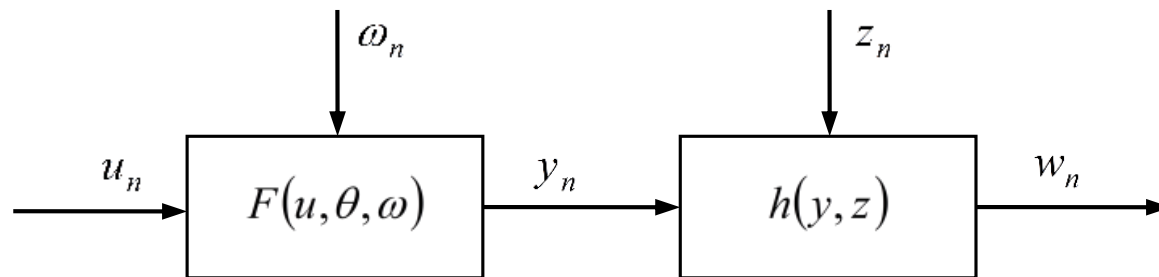
$$f'(\theta | Y_N; U_N) = \frac{f_{\theta}(\theta) \cdot \prod_{n=1}^N f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u_n, \theta, y_n)) |J_F|}{\int_{\Theta} f_{\theta}(\theta) \cdot \prod_{n=1}^N f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u_n, \theta, y_n)) |J_F| d\theta}$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N) \rightarrow r(\theta_N, Y_N; U_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, Y_N; U_N)$$

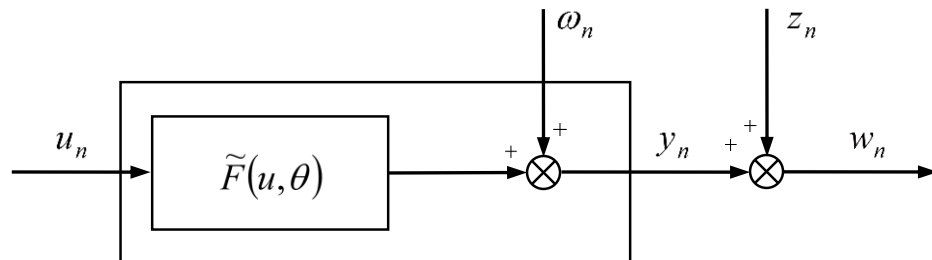
Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu

Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu



Metoda najmniejszych kwadratów

Założenia:



$\underline{z}$, $\underline{\omega}$ - zmienne losowe, takie że $E[\underline{\omega}] = 0$, $Var[\underline{\omega}] < \infty$, $E[\underline{z}] = 0$, $Var[\underline{z}] < \infty$

Wyniki pomiarów są wartościami zmiennej losowej: $\underline{w} = \tilde{F}(u, \theta) + \underline{\omega} + \underline{z}$

$$E[\underline{\omega} + \underline{z}] = 0, \quad Var[\underline{\omega} + \underline{z}] < \infty$$

Empiryczna wariancja:

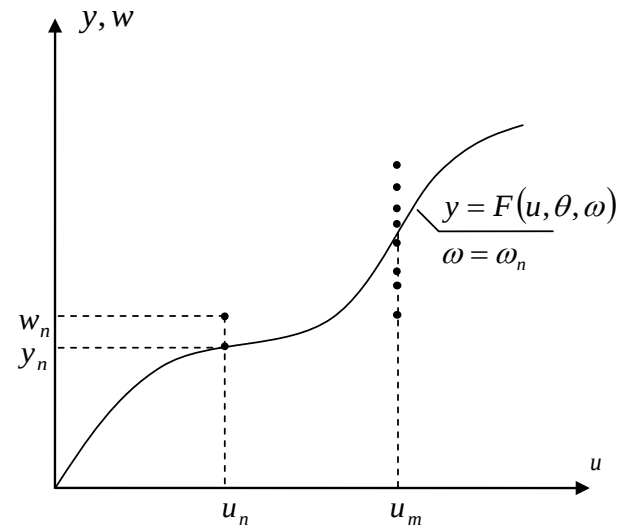
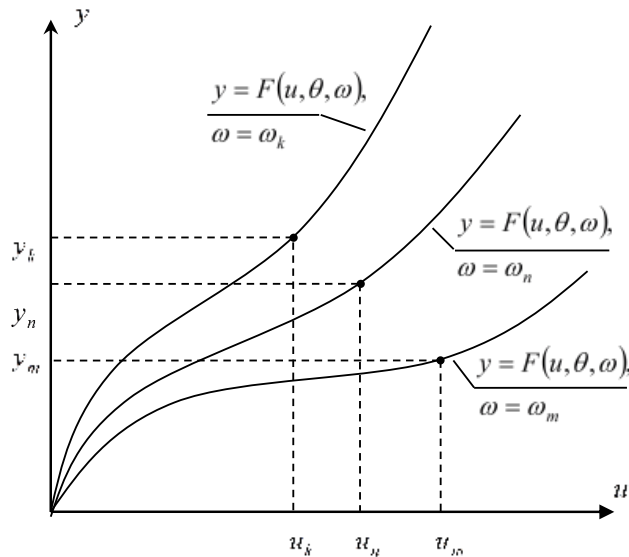
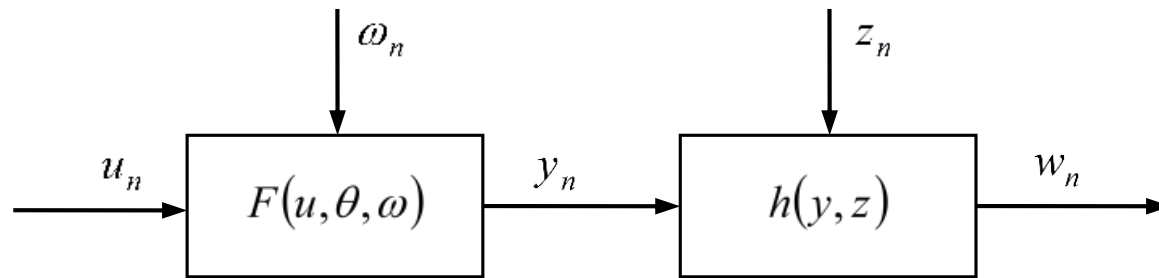
$$Var_{(\omega+z)N}(U_N, W_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (w_n - \tilde{F}(u_n, \theta))^2$$

Algorytm estymacji otrzymujemy w wyniku rozwiązania zadania:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N) \rightarrow Var_{(\omega+z)N}(U_N, W_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{(\omega+z)N}(U_N, W_N, \theta)$$

Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu

Pomiar wyjścia z zakłóceniami oraz losowo zmienny parametr obiektu



Metoda maksymalnej wiarygodności

Założenia:

ω_n jest wartością zmiennej losowej $\underline{\omega}$, o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\omega}(\omega)$

z_n jest wartością zmiennej losowej $\underline{z}$, o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_z(z)$

$w_n, n = 1, 2, \dots, N$ są wartościami zmiennej losowej $\underline{w} = h(\underline{y}, \underline{z})$

Dla zadanego $u_n, y_n, n = 1, 2, \dots, N$ są wartościami zmiennej losowej $\underline{y} = F(u, \theta, \underline{\omega})$

Funkcja h nie jest wzajemnie jednoznaczna względem $(\underline{y}, \underline{z})$, dlatego dodajemy $\underline{y} = \underline{y}$ i w konsekwencji otrzymujemy:

$$\underline{w} = h(\underline{y}, \underline{z})$$

$$\underline{y} = \underline{y}$$

Przekształcenie odwrotne:

$$\underline{z} = h_z^{-1}(\underline{y}, \underline{w})$$

$$\underline{y} = \underline{y}$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Łączna gęstość rozkładu prawdopodobieństwa pary zmiennych $(\underline{w}, \underline{y})$

$$f_{wy}(w, y, \theta; u) = f_z(h_z^{-1}(y, w)) |J_h| f_y(y, \theta; u) = f_z(h_z^{-1}(y, w)) |J_h| f_\omega(F_\omega^{-1}(u, \theta, y)) |J_F|$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej $\underline{w}$

$$f_w(w, \theta; u) = \int_{\mathcal{Y}} f_{wy}(w, y, \theta; u) dy = \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y, w)) f_\omega(F_\omega^{-1}(u, \theta, y)) |J_F| |J_h| dy$$

Funkcja wiarygodności:

$$\begin{aligned} L_N(W_N, \theta; U_N) &= \prod_{n=1}^N f_w(w_n, \theta; u_n) = \\ &= \prod_{n=1}^N \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y, w_n)) f_\omega(F_\omega^{-1}(u_n, \theta, y)) |J_F| |J_h| dy \end{aligned}$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, Y_N) \rightarrow L_N(W_N, \theta_N; U_N) = \max_{\theta \in \Theta} L_N(W_N, \theta; U_N)$$

Metody Bayes'a

Założenia:

Dodatkowo zakładamy, że θ jest wartością zmiennej losowej $\underline{\theta}$, o rozkładzie $f_{\theta}(\theta)$

Dla ustalonego parametru θ oraz wejścia u_n wartości wyjść $y_n, n = 1, 2, \dots, N$ są wartościami zmiennej losowej $\underline{y}$ pod warunkiem, że $\underline{\theta} = \theta$ oraz wejście jest równe u .

$w_n, n = 1, 2, \dots, N$ są wartościami zmiennej losowej $\underline{w}$ pod warunkiem, że $\underline{\theta} = \theta$

z_n jest wartością zmiennej losowej $\underline{z}$, o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_z(z)$

W konsekwencji

$$\underline{w} = h(\underline{y}, \underline{z})$$

$$f_w(w|\theta;u) = \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y,w))f_y(y|\theta;u)|J|dy = \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y,w))f_{\omega}(F_{\omega}^{-1}(u,\theta,y))|J_F||J_h|dy$$

Metody Bayes'a

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa a posteriori:

$$f'(\theta|W_N;U_N) = \frac{f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y, w_n)) f_\omega(F_\omega^{-1}(u_n, \theta, y)) |J_F| |J_h| dy}{\int_{\Theta} f_\theta(\theta) \prod_{n=1}^N \int_{\mathcal{Y}} f_z(h_z^{-1}(y, w_n)) f_\omega(F_\omega^{-1}(u_n, \theta, y)) |J_F| |J_h| dy d\theta}$$

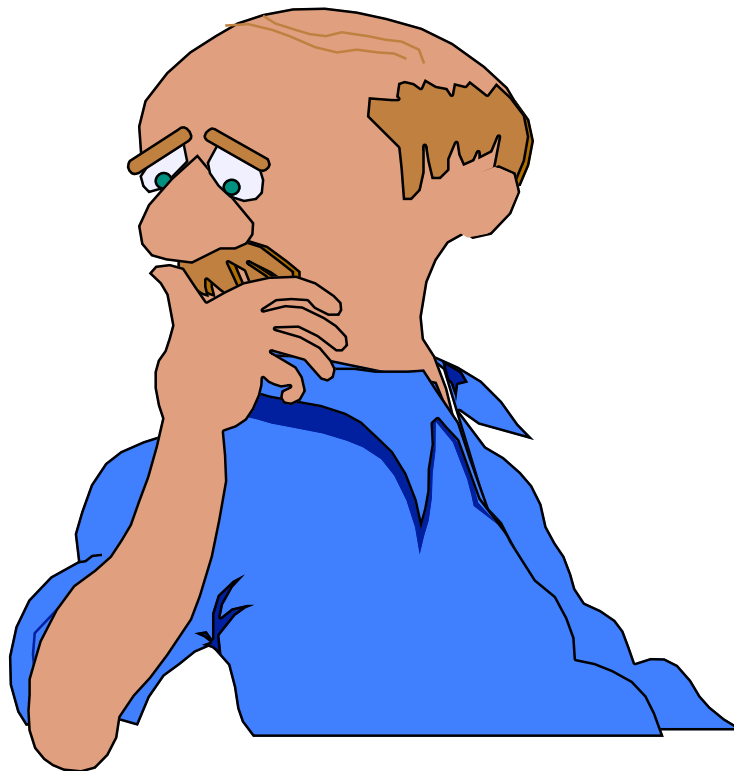
Ryzyko warunkowe:

$$r(\bar{\theta}, W_N; U_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta}) | W_N; U_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(U_N, W_N)) f'(\theta | W_N; U_N) d\theta$$

Algorytm estymacji otrzymujemy rozwiązując zadanie:

$$\theta_N = \Psi_N(U_N, W_N) \rightarrow r(\theta_N, W_N; U_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, W_N; U_N)$$

Dziękuję za uwagę



Metoda najmniejszych kwadratów

$$w_n = u_n + z_n, \quad u_n = Ri_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\bar{z} \sim N(0, \sigma_z)$$

$$Var_N(R) = \sum_{n=1}^N (w_n - Ri_n)^2$$

$$R_N = \frac{\sum_{n=1}^N w_n i_n}{\sum_{n=1}^N (i_n)^2}$$

Metoda Maksymalnej Wiarogodności

$$w_n = u_n + z_n, \quad u_n = Ri_n \quad \bar{z} \sim N(m_z, \sigma_z)$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad f_R(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left(-\frac{(R - m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right)$$

$$z_n = w_n - Ri_n, \quad J = 1$$

$$f_w(w, R; i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(w - Ri - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right)$$

$$\begin{aligned} L_N(W_N, R; I_N) &= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(w_n - Ri_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (w_n - Ri_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{aligned}$$

$$R_N = \frac{\sum_{n=1}^N (w_n - m_z) i_n}{\sum_{n=1}^N (i_n)^2}$$

Metoda Bayes'a

$$w_n = u_n + z_n, \quad u_n = Ri_n \quad \bar{z} \sim N(m_z, \sigma_z) \quad \bar{R} \sim N(m_R, \sigma_R) \quad L(R, \bar{R}) = -\delta(R - \bar{R})$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad f_R(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left(-\frac{(R - m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right)$$

$$z_n = w_n - Ri_n, \quad J = 1$$

$$f_w(w; i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(w - Ri - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right)$$

$$\begin{aligned} r(R, W_N; I_N) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \exp\left(-\frac{(R - m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right) \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(w_n - Ri_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\right)^N \exp\left(-\frac{(R - m_R)^2}{2\sigma_R^2} - \frac{\sum_{n=1}^N (w_n - Ri_n - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \end{aligned}$$

$$R_N = \frac{m_R + \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N w_n i_n}{1 + \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_z}\right)^2 \sum_{n=1}^N (i_n)^2}$$

Losowy parametr w obiekcie

$$u_n = Ri_n, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$R = R_0 + \beta T = R_0 + \omega, \quad \omega = \beta T \quad \omega \sim N(m_\omega, \sigma_\omega)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(-\frac{(\omega - m_\omega)^2}{2\sigma_\omega^2}\right)$$

$$u = Ri = (R_0 + \omega)i \rightarrow \omega = \frac{u}{i} - R_0, \quad J = \frac{1}{i}$$

$$f_u(u; i, R_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(-\frac{\left(\frac{u}{i} - R_0 - m_\omega\right)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \frac{1}{i}$$

$$R_{0N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{i_n} - m_\omega$$

$$L_N(U_N, R_0; I_n) = \prod_{n=1}^N f_u(u_n; i_n, R) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp\left(-\frac{\left(\frac{u_n}{i_n} - R_0 - m_\omega\right)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \frac{1}{i_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N \left(\frac{u_n}{i_n} - R_0 - m_\omega\right)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \frac{1}{\prod_{n=1}^N i_n}$$

Losowy parametr w obiekcie

$$R_{0N} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(\frac{u_n}{i_n} - m_{\omega} \right)}{N}$$