

Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 2d . Identyfikacja obiektów dynamicznych odpowiedzi impulsowa

Identyfikacja obiektów dynamicznych



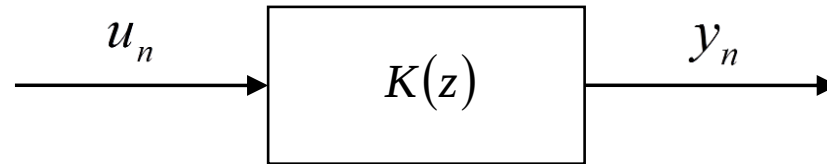
Opisy:

- ⌘ Zmienne stanu;
- ⌘ Równanie różniczkowe/różnicowe;
- ⌘ Transmitancja: $K(s)$, $K(z)$;
- ⌘ Odpowiedź impulsowa: $k_i(t)$, k_{in} ;
- ⌘ Odpowiedź na skok jednostkowy: $h(t)$, h_n

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek dyskretny



Wyjście obiektu dla zadanego wejścia u

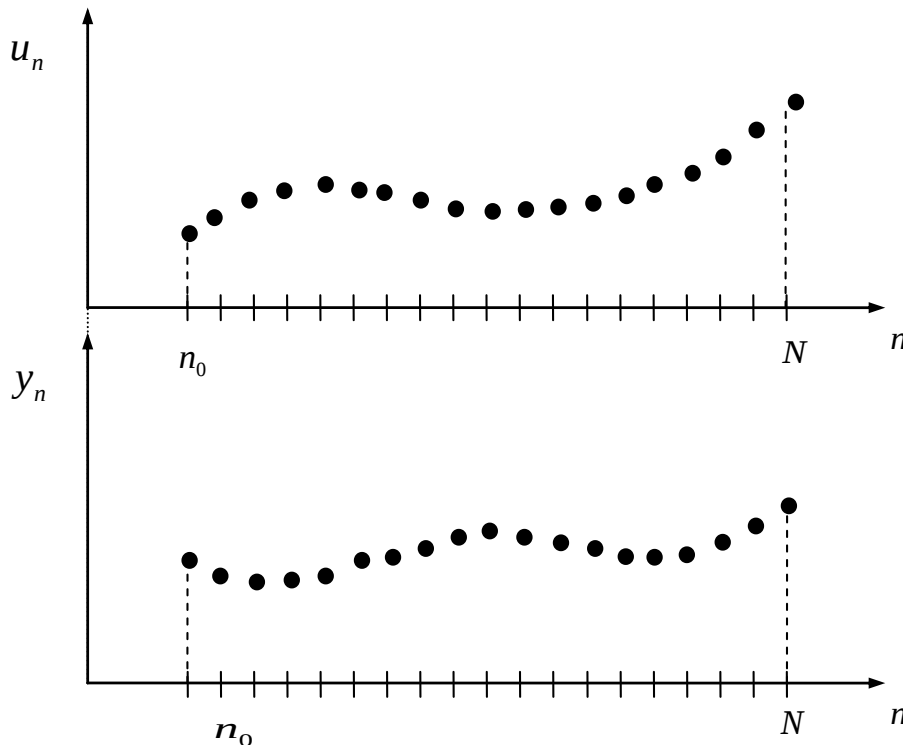
$$y_n = \sum_{k=0}^n k_{ik} u_{n-k} = \sum_{k=0}^n k_{in-k} u_k$$

gdzie: $k_{in} = \mathcal{Z}^{-1}[K(z)]$ dyskretna odpowiedź impulsowa

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Obiekt dyskretny

Dla zadanego wejścia u_n mierzymy wartość wyjścia y_n :



$$\{u_n\}_{n=0}^N$$

$$\{y_n\}_{n=0}^N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek dyskretny

Mamy wyznaczyć dyskretną odpowiedź impulsową (dla $u_n = \delta_n$, $y_n = k_{in}$):

Dysponujemy ciągami pomiarów wejścia i wyjścia: $u_0, u_1, \dots, u_N$
 $y_0, y_1, \dots, y_N$

Możliwe są następujące zadania:

- 1) Obiekt jest liniowy: $k_{in}(\theta)$, k_{in} - znana funkcja lecz nie są znane parametry θ .
- 2) Obiekt jest liniowy i chcemy wyznaczyć ciąg wartości dyskretnej odpowiedzi impulsowej $k_{i0}, k_{i1}, \dots, k_{iN}$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek dyskretny

- 3) Obiekt nieliniowy, który przybliżamy: $\bar{k}_{in}(\theta), \theta^*$
- 4) Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

gdzie:

$\bar{k}_{in}$ - zadana funkcja

θ - nieznany wektor parametrów

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 1. Obiekt liniowy

gdzie:

k_{ik} - znana funkcja, θ - wektor nieznanych paramentów

$$y_n = \sum_{k=0}^N k_{ik}(\theta) u_{n-k}$$

$$N \cdot L \geq R$$

$$\dim y = L$$

$$\dim \theta = R$$

$$y_0 = k_{i0}(\theta) u_0$$

$$y_1 = k_{i0}(\theta) u_1 + k_{i1}(\theta) u_0$$

$$\vdots$$

$$y_N = k_{i0}(\theta) u_N + k_{i1}(\theta) u_{N-1} + \dots + k_{iN}(\theta) u_0$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem θ daje algorytm identyfikacji

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 2. Wyznaczenie ciągu wartości odpowiedzi impulsowej

$$k_{i0}, k_{i1}, \dots, k_{iN}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^n k_{ik} u_{n-k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = k_{i0} u_0 \\ y_1 = k_{i0} u_1 + k_{i1} u_0 \\ \vdots \\ y_N = k_{i0} u_N + k_{i1} u_{N-1} + \dots + k_{iN} u_0 \end{array} \right.$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 2. Wyznaczenie ciągu wartości odpowiedzi impulsowej

$$k_{i0}, k_{i1}, \dots, k_{iN}$$

Oznaczmy przez:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = Y_N \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & u_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_0 \end{bmatrix} = U_N \begin{bmatrix} k_{i0} \\ k_{i1} \\ \vdots \\ k_{iN} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{iN}$$

Otrzymujemy równanie, którego rozwiązanie daje algorytm identyfikacji:

$$Y_N = U_N \mathbf{k}_{in} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{k}_{in} = U_N^{-1} Y_N}}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Ad. 3. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy $\bar{k}_{in}(\theta)$.

gdzie: $\bar{k}_{ik}$ - zadana funkcja, θ - wektor nieznanych parametrów

$$\bar{y}_n = \sum_{k=0}^N \bar{k}_{ik}(\theta) u_{n-k} \quad - \text{przybliżona wartość wyjścia}$$

Wskaźnik jakości:

$$Q_N(\theta) = \sum_{n=0}^N (y_n - \bar{y}_n)^2 = \sum_{n=0}^N \left(y_n - \sum_{k=0}^n \bar{k}_{ik}(\theta) u_{n-k} \right)^2$$

W wyniku rozwiązania poniższego zadania optymalizacji otrzymamy algorytm identyfikacji:

$$\theta_N^* \rightarrow Q_N(\theta_N^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

Model:

$$\bar{y}_n = \sum_{k=0}^N \bar{k}_{ik} u_{n-k}$$

Wskaźnik jakości:

$$Q_N(\bar{k}_{i0}, \bar{k}_{i1}, \dots, \bar{k}_{iN}) = \sum_{n=0}^N (y_n - \bar{y}_n)^2 = \sum_{n=0}^N \left(y_n - \sum_{k=0}^n \bar{k}_{ik} u_{n-k} \right)^2$$

Rozwiązując poniższe zadanie optymalizacji otrzymujemy algorytm identyfikacji:

$$k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^* \rightarrow Q_N(k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*) = \min_{\bar{k}_{i0}, \dots, \bar{k}_{iN}} Q_N(\bar{k}_{i0}, \bar{k}_{i1}, \dots, \bar{k}_{iN})$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

Rozwiązanie:

$$\frac{\partial Q_N(\bar{k}_{i0}, \bar{k}_{i1}, \dots, \bar{k}_{iN})}{\partial \bar{k}_{ip}} \bigg|_{\substack{\bar{k}_{i0} = \bar{k}_{i0}^* \\ \bar{k}_{i1} = \bar{k}_{i1}^* \\ \vdots \\ \bar{k}_{iN} = \bar{k}_{iN}^*}} = 0 \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$-2 \sum_{n=0}^N \left(y_n - \sum_{k=0}^n k_{ik}^* u_{n-k} \right) u_{n-p} = 0 \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

$$\sum_{n=0}^N y_n u_{n-p} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n k_{ik}^* u_{n-k} u_{n-p} \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

Ponieważ dla $n < 0$ zachodzi $u_n = 0$ możemy, n zamienić przez N

$$\sum_{n=0}^N y_n u_{n-p} = \sum_{k=0}^N k_{ik}^* \sum_{n=0}^N u_{n-k} u_{n-p} \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

Oznaczmy przez $n - p = \chi$. Teraz możemy przepisać układ równań:

$$\sum_{\chi=0}^{N-p} y_{\chi+p} u_{\chi} = \sum_{k=0}^N k_{ik}^* \sum_{\chi=0}^{N-p} u_{\chi+p-k} u_{\chi} \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

Oznaczmy przez:

$$\sum_{\chi=0}^{N-p} y_{\chi+p} u_{\chi} = \rho_{yu,p}[p] \quad - \text{ korelację pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym}$$

$$\sum_{\chi=0}^{N-p} u_{\chi+p-k} u_{\chi} = \rho_{uu,p}[p-k] \quad - \text{ autokorelację sygnału wejściowego}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, który przybliżamy ciągiem wartości odpowiedzi impulsowej $k_{i0}^*, k_{i1}^*, \dots, k_{iN}^*$

Układ równań przyjmuje postać:

$$\rho_{yu,p}[p] = \sum_{k=0}^N k_{ik}^* \rho_{uu,p}[p-k] \quad p = 0, 1, 2, \dots, N$$

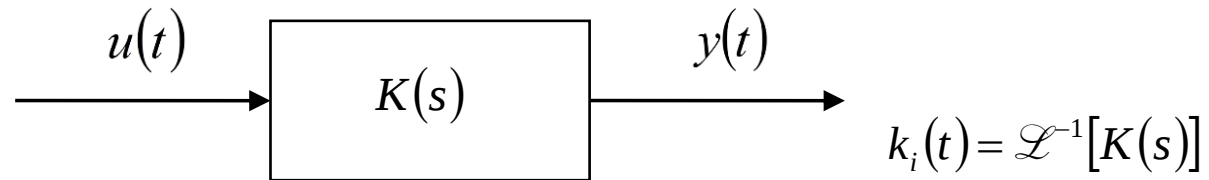
lub

$$\begin{bmatrix} \rho_{yu,0}[0] \\ \rho_{yu,1}[1] \\ \vdots \\ \rho_{yu,N}[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{uu,0}[0] & \rho_{uu,0}[-1] & \cdots & \rho_{uu,0}[-N] \\ \rho_{uu,1}[1] & \rho_{uu,1}[0] & \cdots & \rho_{uu,1}[1-N] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{uu,N}[N] & \rho_{uu,N}[N-1] & \cdots & \rho_{uu,N}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{i0}^* \\ k_{i1}^* \\ \vdots \\ k_{iN}^* \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \bar{\rho}_{yu} = \bar{\rho}_{uu} k_{iN}^* \\ \Downarrow \\ \underline{\underline{k_{iN}^* = \rho_{uu}^{-1} \rho_{yu}}} \end{array}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek ciągły

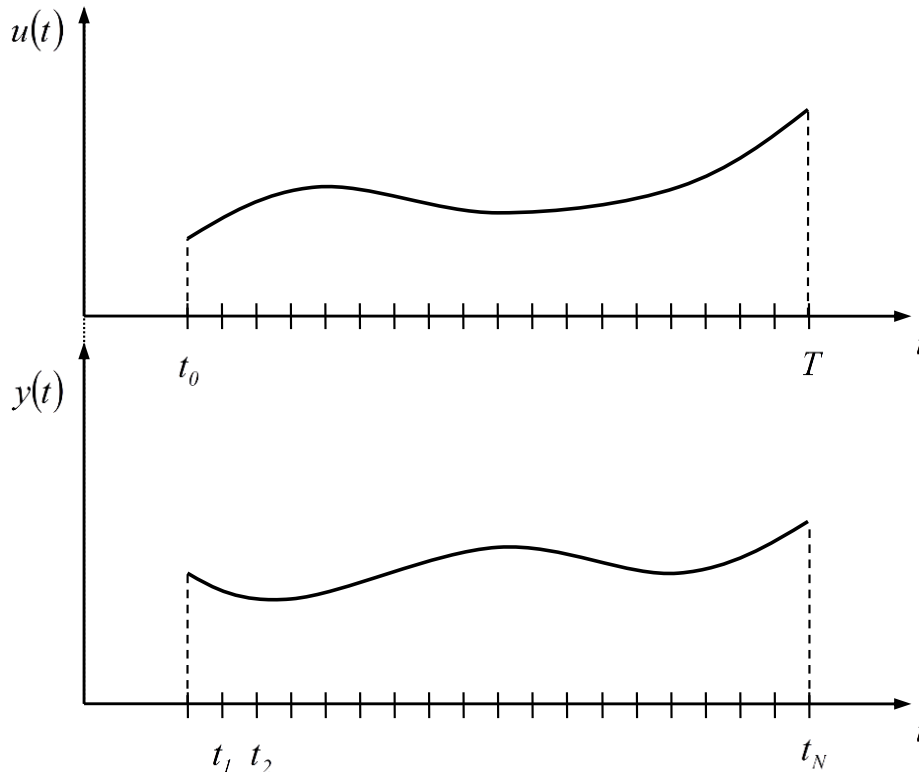


$$y(t) = \int_0^T k_i(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^T k_i(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad - \text{wyjście obiektu}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Dla sygnału wejściowego $\{u(t)\}_{t_0}^T$ mierzymy sygnał wyjściowy $\{y(t)\}_{t_0}^T$:



$$t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$$

$$\{u(t_n)\}_{n=0}^N \quad \{y(t_n)\}_{n=0}^N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek ciągły

Dysponujemy pomiarami: $\{u(t)\}_{t=0}^T$, $\{y(t)\}_{t=0}^T$

Możliwe są następujące zadania:

- 1) Obiekt jest liniowy i znamy odpowiedź impulsową $k_i(t, \theta)$ z dokładnością do parametrów θ :
- 2) Obiekt jest liniowy i chcemy wyznaczyć odpowiedź impulsową $k_i(t)$

Gdzie :

$k_i(t, \theta)$ - znana funkcja, θ - nieznany wektor parametrów

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

Przypadek liniowy

- 3) Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t, \theta)$ o parametrach θ
- 4) Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

gdzie:

$\bar{k}_i(t, \theta)$ - zadana funkcja, θ - nieznany wektor parametrów modelu

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 1. Obiekt jest liniowy i znamy odpowiedź impulsową $k_i(t, \theta)$,
z dokładnością do parametrów θ

$$y(t) = \int_0^t k_i(\tau, \theta) u(t - \tau) d\tau$$

Dla kolejnych pomiarów mamy:

$$y(t_n) = \int_0^{t_n} k_i(\tau, \theta) u(t - \tau) d\tau \quad n = 1, 2, \dots, R$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem θ otrzymujemy algorytm identyfikacji.

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 2. Należy wyznaczyć

$$k_i(t)$$

$$k_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$$

$$K(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 3. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t, \theta)$ o parametrach θ

Model:

$$\bar{y}(t, \theta) = \int_0^t \bar{k}_i(\tau, \theta) u(t - \tau) d\tau$$

Wskaźnik jakości:

$$Q_T(\theta) = \int_0^T (y(t) - \bar{y}(t, \theta))^2 dt = \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t \bar{k}_i(\tau, \theta) u(t - \tau) d\tau \right)^2 dt$$

Rozwiązując poniższy problem optymalizacji otrzymujemy algorytm identyfikacji:

$$\theta_T^* \rightarrow Q_T(\theta^*) = \min_{\theta} Q_T(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

Model:
$$\bar{y}(t) = \int_0^t \bar{k}_i(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Wskaźnik jakości:

$$Q(\bar{k}_i(\tau)) = \int_0^T (y(t) - \bar{y}(t))^2 dt = \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t \bar{k}_i(\tau) u(t - \tau) d\tau \right)^2 dt$$

Rozwiązując poniższe zadania optymalizacji otrzymamy algorytm identyfikacji (optymalizacja funkcjonału)

$$k_i^*(\tau) \rightarrow Q_T(k_i^*(\tau)) = \min_{\bar{k}_i(\tau)} Q_T(\bar{k}_i(\tau))$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

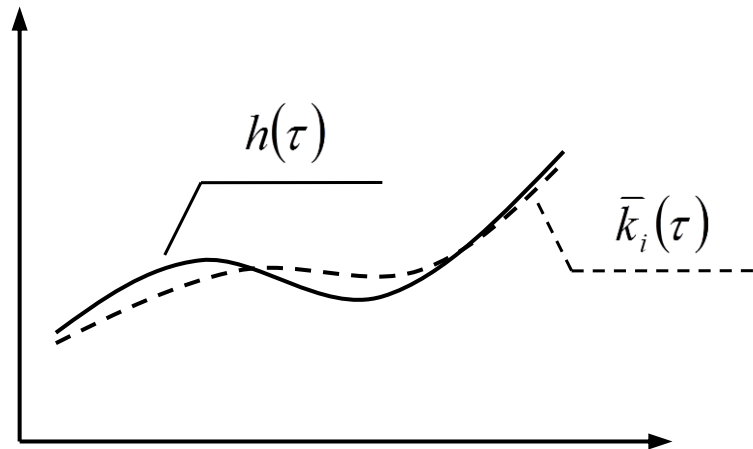
Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

$$k_i^*(\tau) \rightarrow Q_T(k_i^*(\tau)) = \min_{\bar{k}_i(\tau)} Q_T(\bar{k}_i(\tau))$$

$$\bar{k}_i(\tau) + \delta h(\tau)$$

$$\left. \frac{\partial Q_T}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = 0, \quad \forall h(\tau)$$



Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

$$\begin{aligned} Q(\bar{k}_i(\tau) + \delta h(\tau)) &= \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t (\bar{k}_i(\tau) + \delta h(\tau)) u(t-\tau) d\tau \right)^2 dt = \\ &= \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t \bar{k}_i(\tau) u(t-\tau) d\tau - \delta \int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right)^2 dt = \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t \bar{k}_i(\tau) u(t-\tau) d\tau \right)^2 dt + \\ &- 2\delta \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t \bar{k}_i(\tau) u(t-\tau) d\tau \right) \int_0^t h(\chi) u(t-\chi) d\chi dt + \delta^2 \int_0^T \left(\int_0^t h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right)^2 dt = \\ &= Q_1 - 2\delta Q_2 + \delta^2 Q_3 = Q \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = -2Q_2 + 2\delta Q_3 \Big|_{\delta=0} = 0 \Rightarrow Q_2 = 0 \quad \forall h(\tau)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

$$\text{dla } \forall h(\tau), \text{ zatem } \int_0^T \left(y(t) - \int_0^t k_i^*(\tau) u(t-\tau) d\tau \right) \int_0^t h(\chi) u(t-\chi) d\chi dt = 0$$

$$u(t) = 0 \quad t < 0 \quad t \rightarrow T$$

$$\forall h(\tau) \quad \int_0^T \left(y(t) - \int_0^T k_i^*(\tau) u(t-\tau) d\tau \right) \int_0^T h(\chi) u(t-\chi) d\chi dt = 0$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

$$\forall h(\tau) \quad \int_0^T h(\chi) \left(\underbrace{y(t)u(t-\chi)dt - \int_0^T k_i^*(\tau) \int_0^T u(t-\tau)u(t-\chi)dtd\tau}_{\substack{\Downarrow \\ 0 \\ \Downarrow}} \right) d\chi = 0$$

gdzie:

$$\int_0^T y(t)u(t-\chi)dt = \int_0^T k_i^*(\tau) \int_0^T u(t-\tau)u(t-\chi)dtd\tau$$

$$t - \chi = \gamma$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Odpowiedź impulsowa

ad. 4. Obiekt jest nieliniowy, chcemy przybliżyć modelem liniowym z odpowiedzią impulsową $\bar{k}_i(t)$

$$\int_0^{T-\gamma} y(\gamma + \chi) u(\gamma) dt = \int_0^T k_i^*(\tau) \int_0^{T-\gamma} u(\gamma) u(\gamma + \chi - \tau) dt d\tau$$

$$\rho_{yu}(\chi) = \int_0^T k_i^*(\tau) \rho_{uu}(\chi - \tau) d\tau$$

Dziękuję za uwagę

