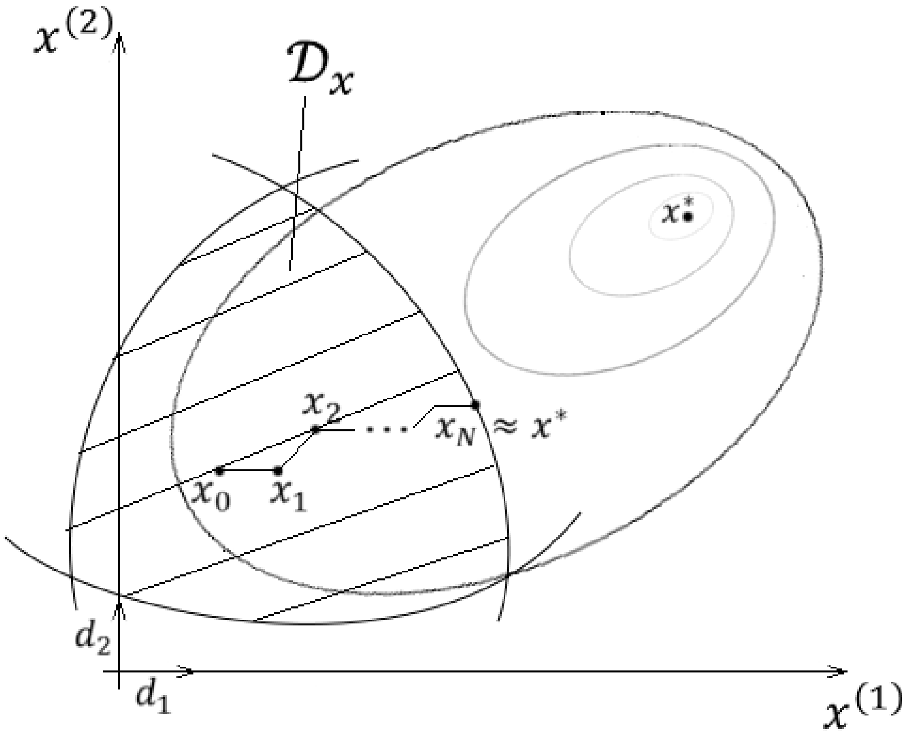
Politechnika Wrocławska

Metody optymalizacji z ograniczeniami

informacje dodatkowe

Numeryczne metody optymalizacji z ograniczeniami

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



1. Metoda transformacji zmiennych
2. Metody funkcji kary
   - kara zewnętrzna (kara)
   - kara wewnętrzna (bariera)
3. Metody poprawy kierunków
4. Inne

Politechnika Wrocławska

Metoda transformacji zmiennych

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\begin{array}{ccc}
x^* & \longrightarrow & \displaystyle\min_{x \in D_x} F(x) \\
\uparrow & \begin{array}{c} p: R^s \rightarrow \mathcal{D}_x \\ x = p(z) \\ \bar{F}(z) = F\big(p(z)\big) \\ z \in R^s \rightarrow x \in \mathcal{D}_x \end{array} & \downarrow \\
z^* & \longleftarrow & \displaystyle\min_{z \in R^s} \bar{F}(z)
\end{array}$$

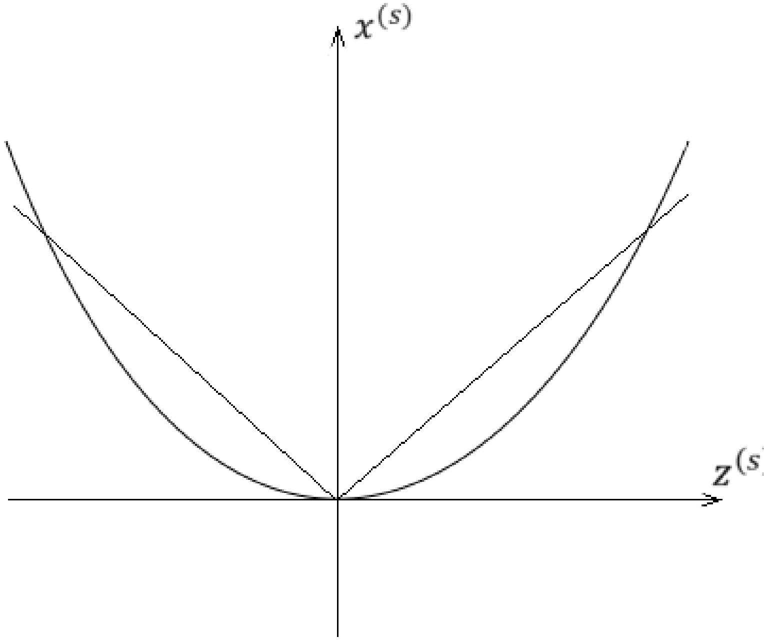
Przykład

$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \qquad F(x) = \sum_{s=1}^{S} \left(x^{(s)} + 5\right)^2$$

$$D_x = \{x \in R^S, \quad x^{(s)} \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots . S\}$$

$$x^{(s)} = \left(z^{(s)}\right)^2 \text{ lub } x^{(s)} = \left|z^{(s)}\right|$$

$$z^{(s)} \in R \quad \to x^{(s)} \in [0, \infty)$$



$$F(x) = \sum_{s=1}^{S} \left(x^{(s)} + 5\right)^2 \quad \to \quad \bar{F}(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(\left|z^{(s)}\right| + 5\right)^2 \qquad z^* \to \bar{F}(z^*) = \min_{z \in R^S} \bar{F}(z)$$

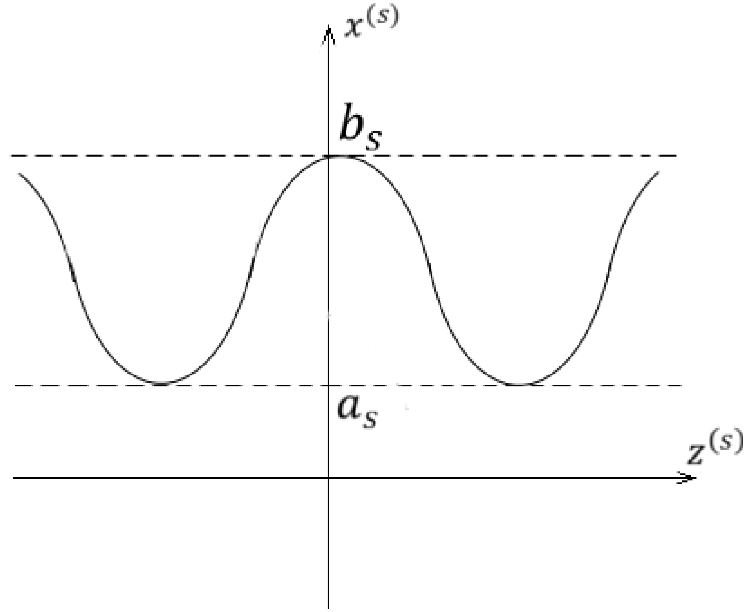
Przykład

$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \qquad F(x) = \sum_{s=1}^{S} \left(x^{(s)}\right)^2$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{x \in R^s, \qquad a_s \leq \ x^{(s)} \leq b_s, \qquad s = 1, 2, \dots, S\right\}$$

$$x^{(s)} = a_s + (b_s - a_s)\sin^2 z^{(s)}$$

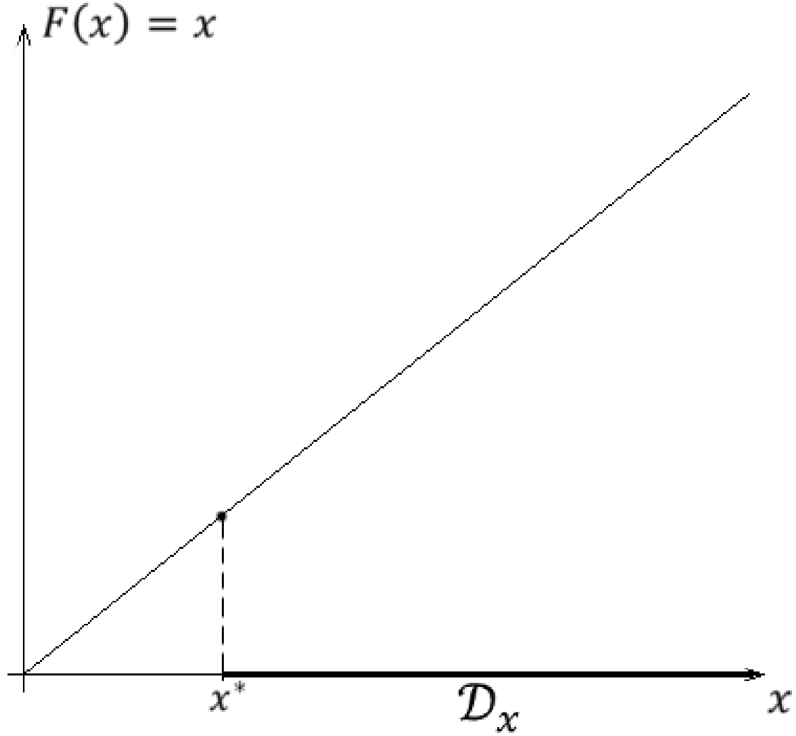
$$z^{(s)} \in R^1 \to x^{(2)} \in [a_s, b_s]$$



$$F(x) = \sum_{s=1}^{S} \left(x^{(s)}\right)^2 \ \to \ \bar{F}(z) = \sum_{s=1}^{S} \left(a_s + (b_s - a_s)\sin^2 z^{(s)}\right)^2 \quad z^* \to \bar{F}(z^*) = \min_{z \epsilon R^S} \bar{F}(z)$$

Przykład

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \qquad F(x) = x \qquad \mathcal{D}_x = \{x \in R^1 \;\; x \geq 1\}$$



$$x^* \rightarrow \min_{x \geq 1} x$$

$$x = z^2 + 1 = p(z)$$

$$z \in R \rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\bar{F}(z) = z^2{+}1$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \epsilon R} \bar{F}(z)$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \epsilon R}(z^2{+}1)$$

$$\left(z^2 + 1\right)' = 2z = 0$$

$$z^* = 0$$

$$x^* = p(z^*) = (z^*)^2 + 1 = 1$$

Metoda transformacji zmiennych

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\begin{tikzcd}
x^* \arrow[r] & \min\limits_{x \in D_x} F(x) \arrow[d] \\
z^* \arrow[u] & \min\limits_{z \in R^s} \bar{F}(z) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered}
p: R^s \rightarrow \mathcal{D}_x \\
x = p(z) \\
\bar{F}(z) = F\big(p(z)\big) \\
z \in R^s \rightarrow x \in \mathcal{D}_x
\end{gathered}$$

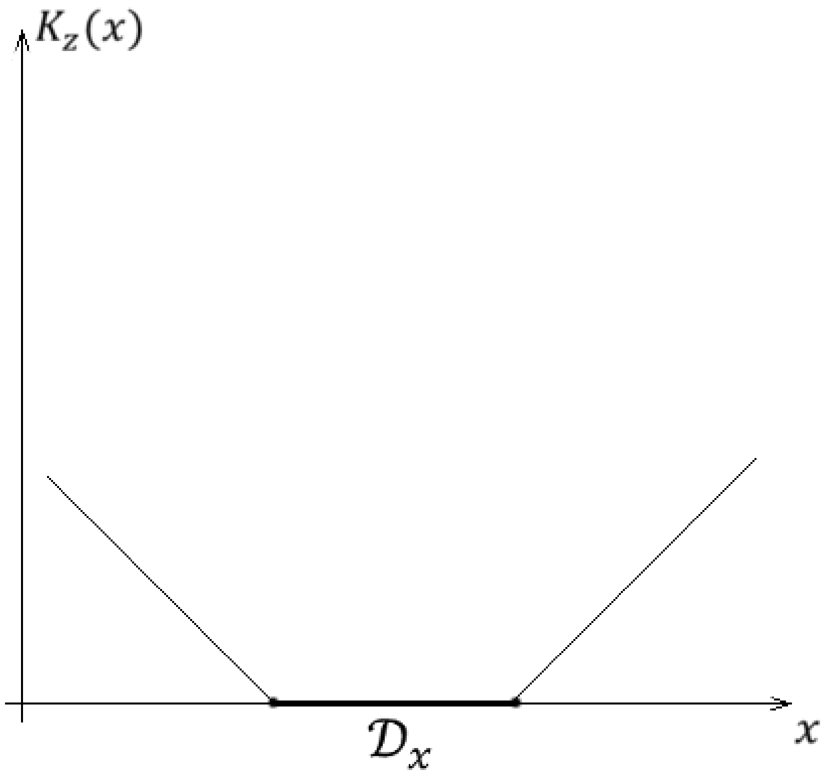
Metody funkcji kary
Kary zewnętrzne (kary)

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_z(x)$$

$$K_z(x) \begin{cases} = 0 & x \in \mathcal{D}_x \\ > 0 & x \notin \mathcal{D}_x \end{cases}$$

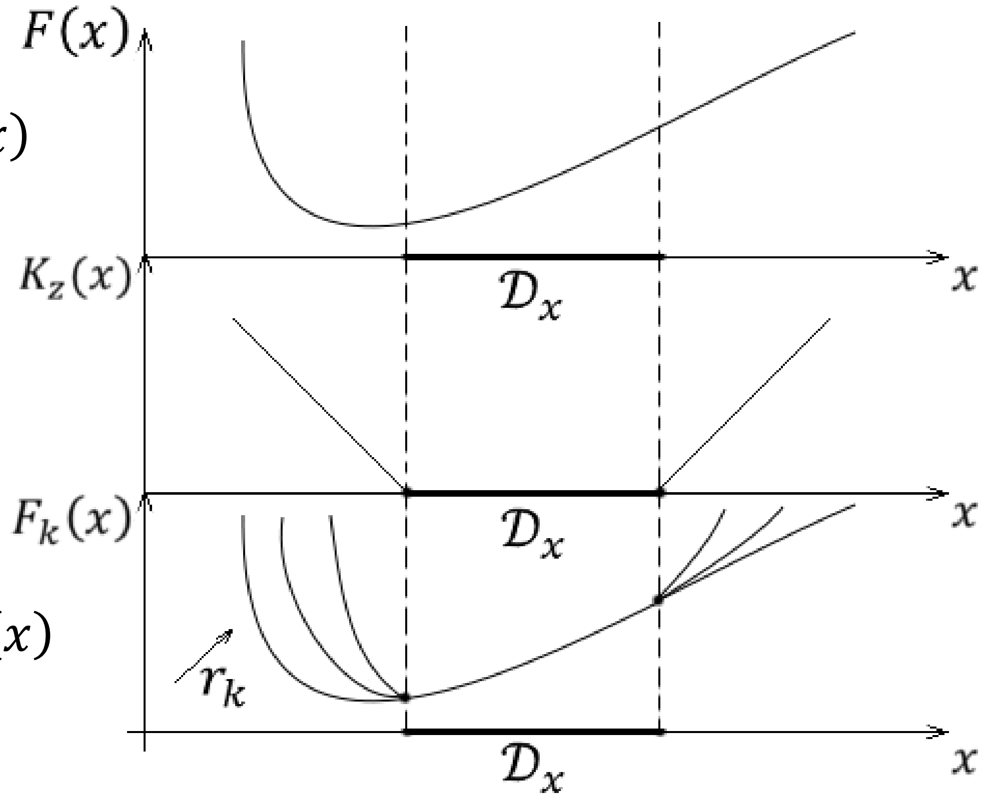
$$x_k^* \rightarrow F(x_k^*) = \min_{x \in R^S} F_k(x)$$



$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_w(x)$$

$$x_k^* \to F(x_k^*) = \min_{x \in R^S} F_k(x)$$



$r_k > 0$ $\qquad$ $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$

Przykłady funkcji kary zewnętrznej

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^S,\ \varphi_l(x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m(x) \le 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$\varphi_l(x) \to K_{lz}(x) = \left(\varphi_l(x)\right)^2, l = 1, 2, \dots, L$$

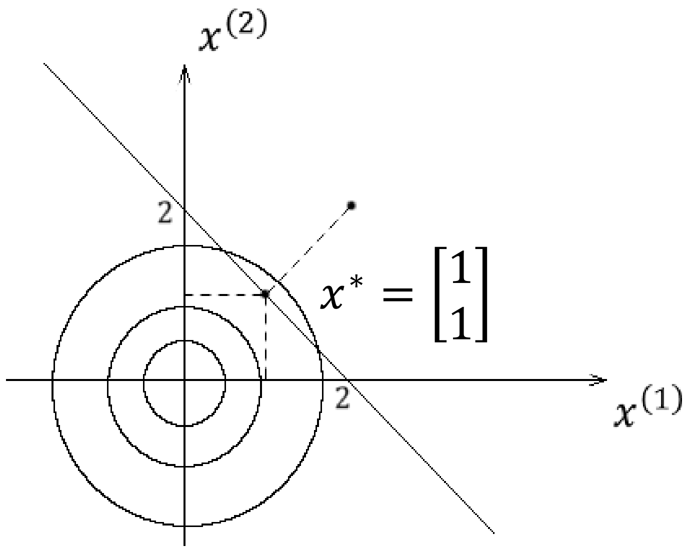
$$\psi_m(x) \to K_{mz}(x) = (\max\{0, \psi_m(x)\})^2, m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_z(x) = \sum_{l=1}^{L} r_l\left(\varphi_l(x)\right)^2 + \sum_{m=1}^{M} \rho_m(\max\{0, \psi_m(x)\})^2$$

Przykład

$$F(x) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^2, x^{(1)} + x^{(2)} - 2 = 0\}$$



$$F_k(x) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2 + r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right)^2$$

$$\nabla_x F_k(x) = 0_2$$

$$2x^{(1)} + 2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

$$2x^{(2)} + 2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

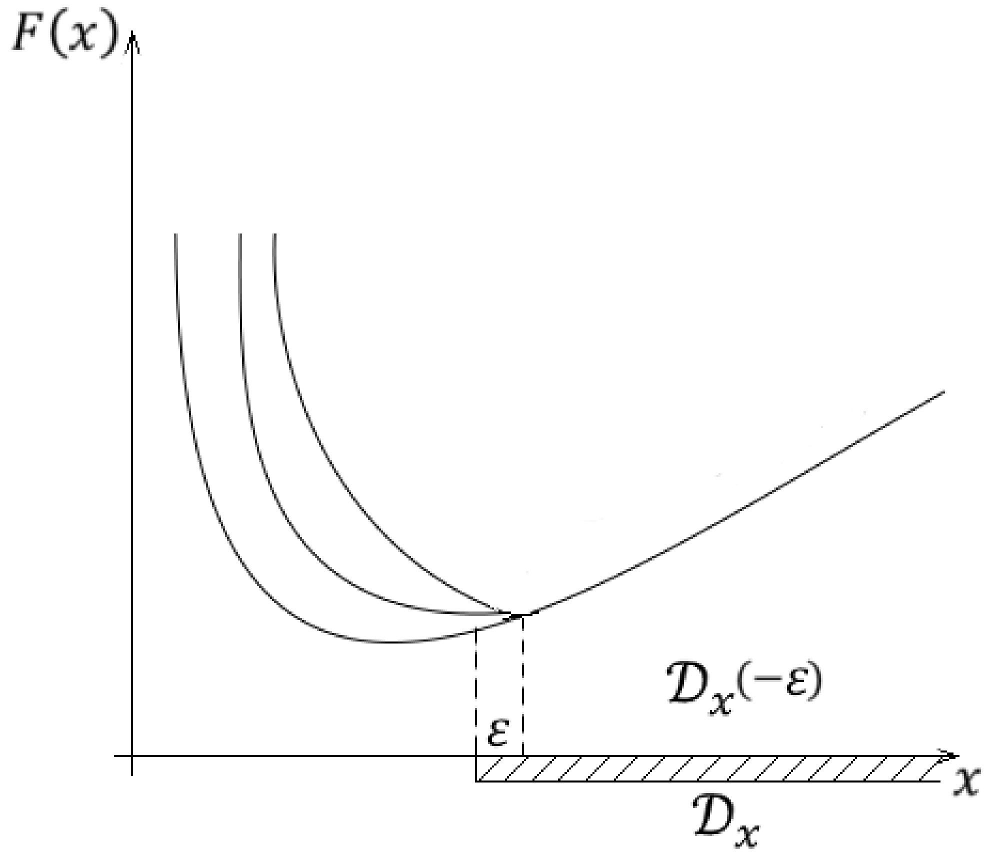
$$x^{(1)} = x^{(2)}$$

$$+2r_k\left(x^{(1)} + x^{(2)} - 2\right) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \frac{2r_k}{2r_k + 1}$$

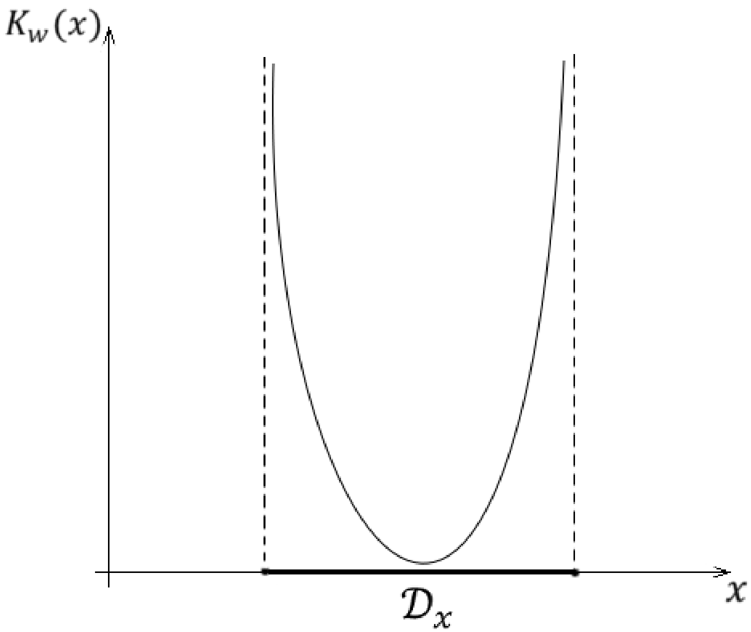
$$x^{(1)} = x^{(2)} = \lim_{r_k \to \infty} \frac{2r_k}{2r_k + 1} = 1, \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Modyfikacje



Zaczynamy coraz wcześniej

Kary wewnętrzne (bariery)



$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_w(x)$$

$$x_k^* \rightarrow F(x_k^*) = \min_{x \in R^S} F_k(x)$$

$K_w(x)$ – taka funkcja, że

$$\exists\; x_1, x_{,2}, \dots, x_n \in \mathcal{D}_x \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = x \in \mathcal{D}_x$$

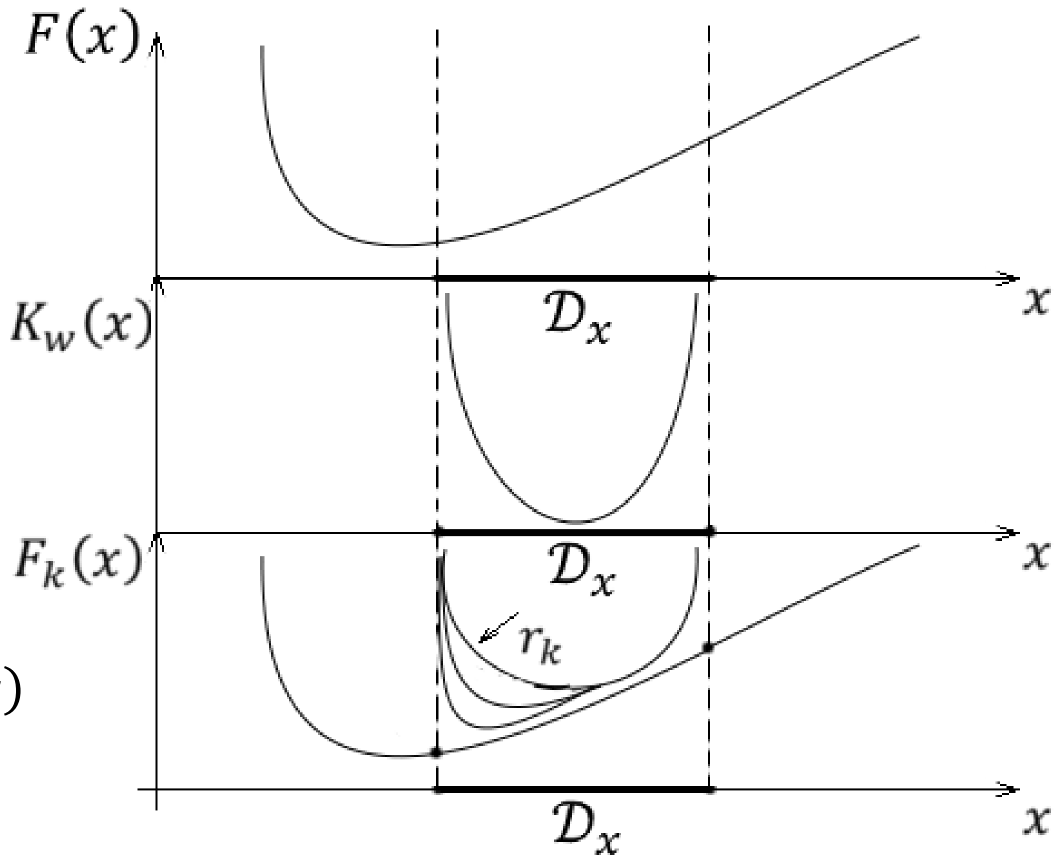
$$\exists_k \quad K_w(x_k + 1) > K_w(x_k)$$

Kary wewnętrzne (bariery)

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_w(x)$$

$$x_k^* \rightarrow F(x_k^*) = \min_{x \in R^S} F_k(x)$$



$r_k > 0 \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$

Kara wewnętrzna (metoda Carrola)

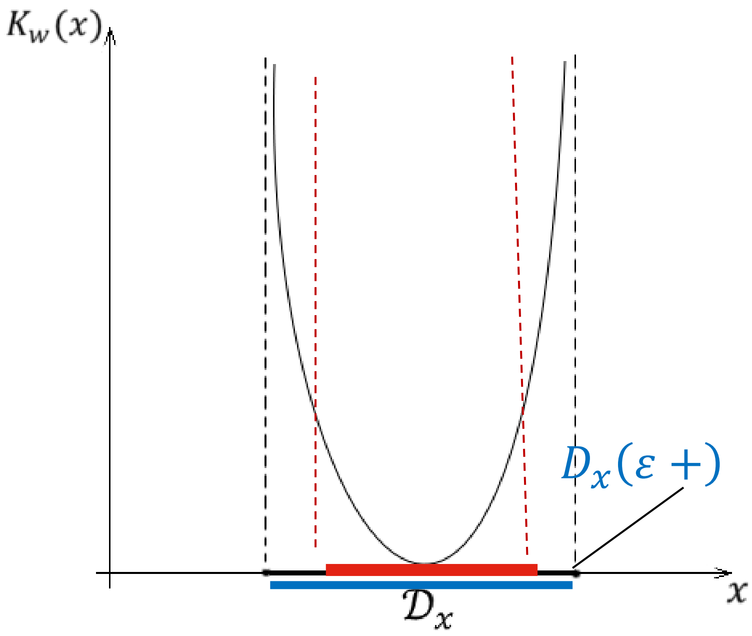
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^S, \qquad \psi_m(x) \le 0, \qquad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$K_{Wm}(x) = \frac{-1}{\psi_m(x)}$$

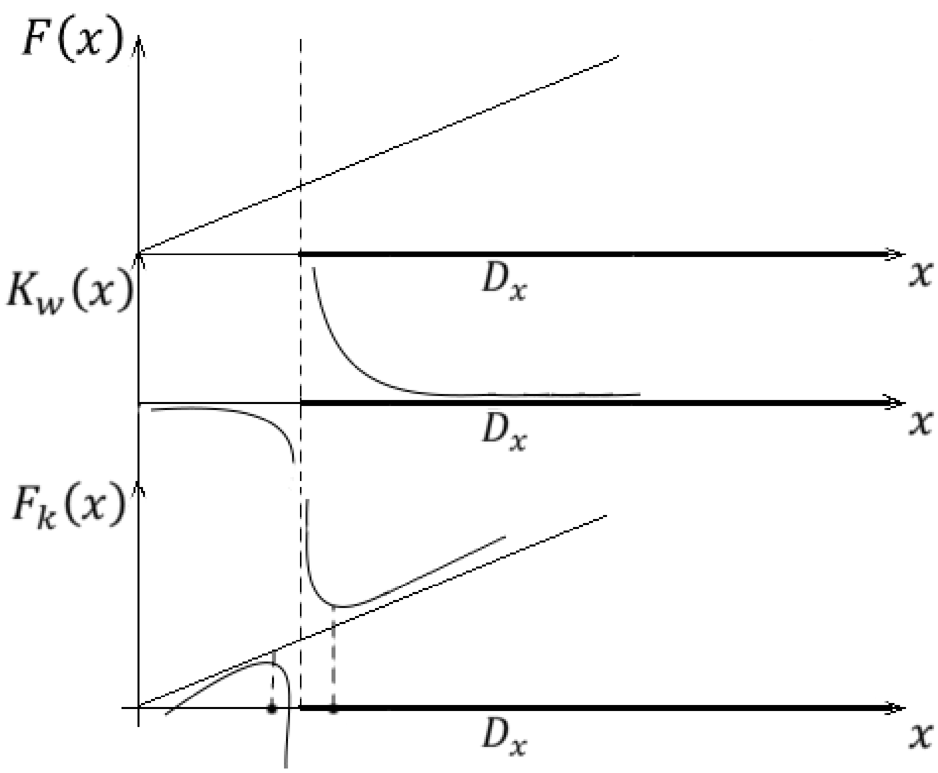
$$K_w(x) = \sum_{m=1}^{M} r_m K_{Wm}(x) = \sum_{m=1}^{M} r_m \frac{-1}{\psi_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



Przykład

$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \qquad F(x) = x;\ \ \mathcal{D}_x = \{x \in R^1, x \geq 1\} \equiv \{x \in R^1, 1 - x \leq 0\}$$



$$K_w(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$$F_k(x) = x + r_k \frac{1}{x-1}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{-r_k}{(x-1)^2} = 0$$

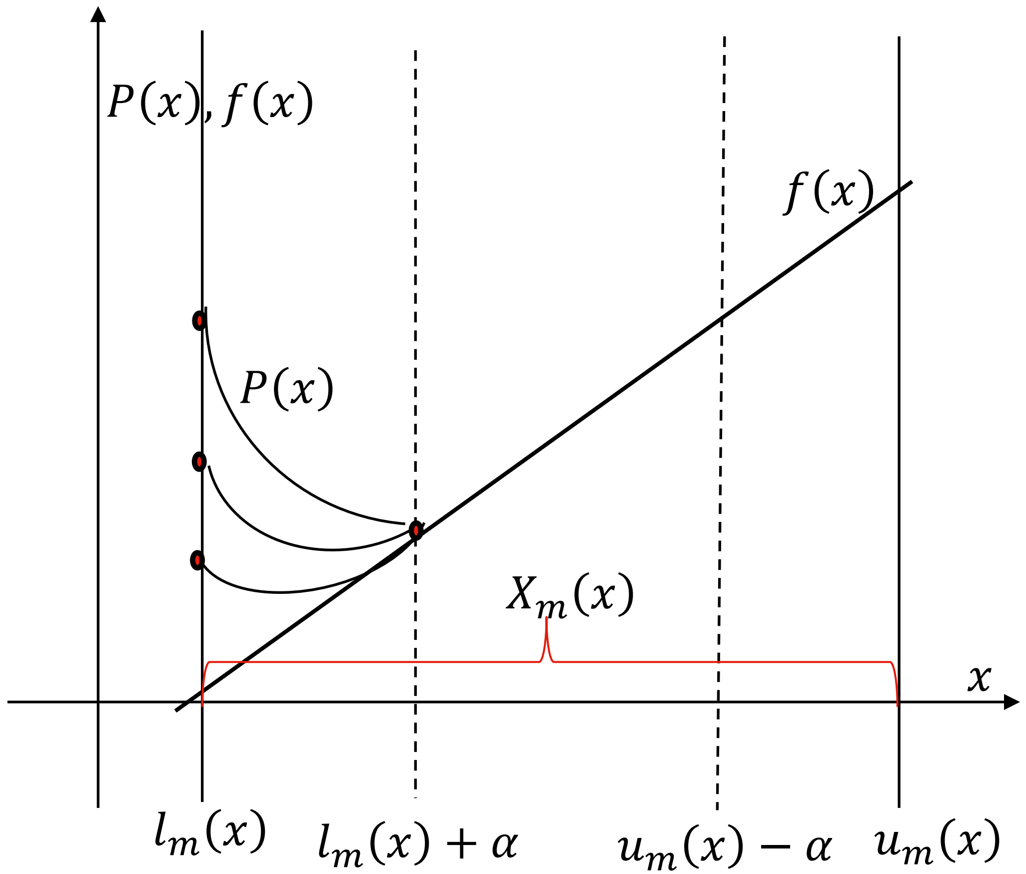
$$x_k = 1 \pm \sqrt{r_k}$$

$$x_k = 1 - \sqrt{r_k} \notin \mathcal{D}_x$$

$$x_k = 1 + \sqrt{r_k} \in \mathcal{D}_x$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$$

Metoda Rozebrocka



Metoda Rozebrocka

$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$D_x = \{l_m(x) \leq X_m(x) \leq u_m(x) \;\; m = 1,2,\cdots, M \}$$

$$l_m(x) \leq X_m(x) \leq l_m(x) + \alpha$$

$$u_m(x) \leq X_m(x) \leq u_m(x) - \alpha$$

$$P(x) = f(x) - (f(x) - f^*)\left(3\mu - 4\mu^2 + 2\mu^3\right)$$

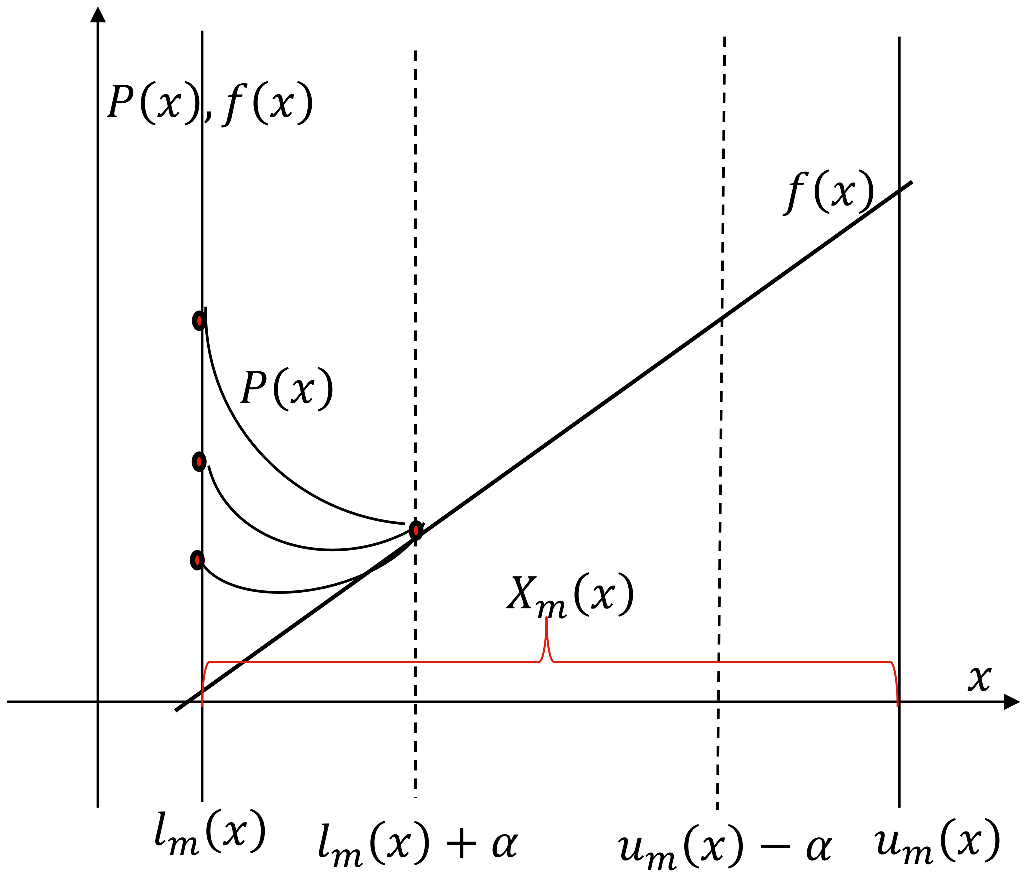
$$\mu = \frac{l_m(x) + \alpha - X_m(x)}{\alpha} \text{ lub } \mu = \frac{X_m(x) - u_m(x) + \alpha}{\alpha}$$

$$l_m(x) + \alpha \leq X_m(x) \leq u_m(x) - \alpha$$

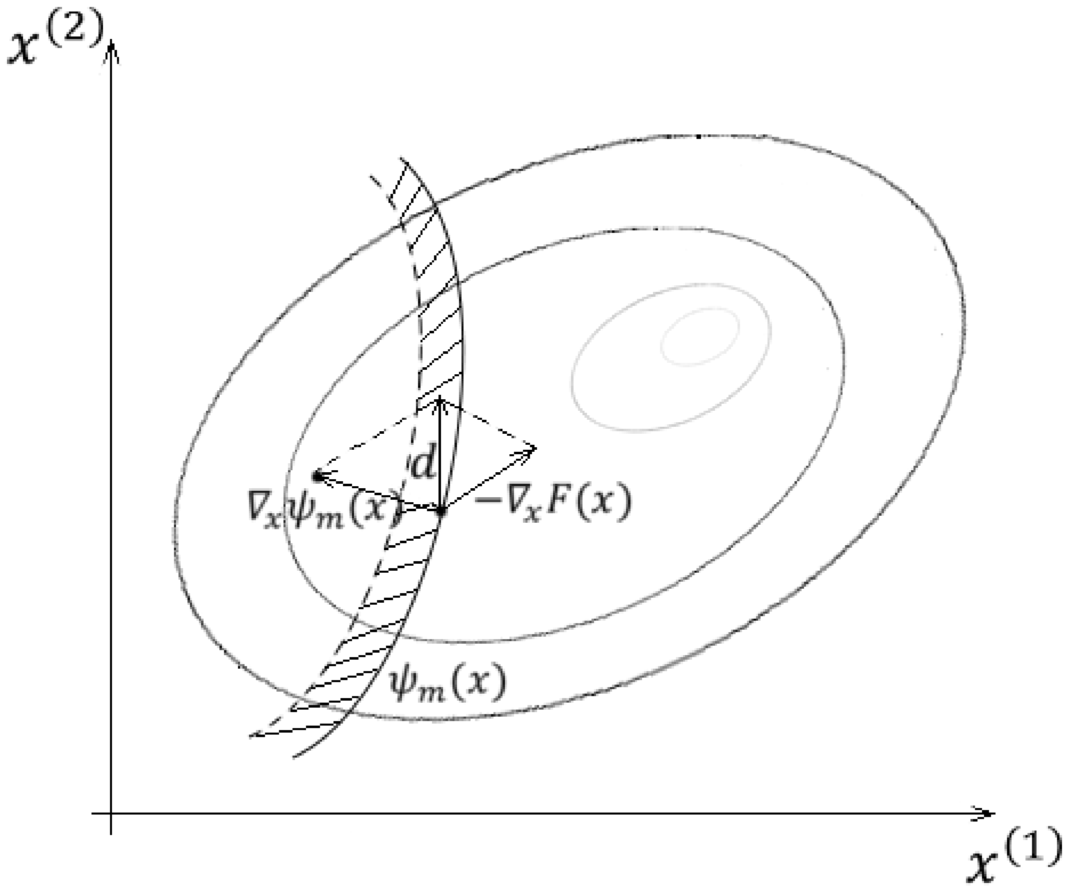
$$P(x) = f(x)$$

Politechnika Wrocławska

Metoda Rozebrocka



Metoda modyfikacji kierunków

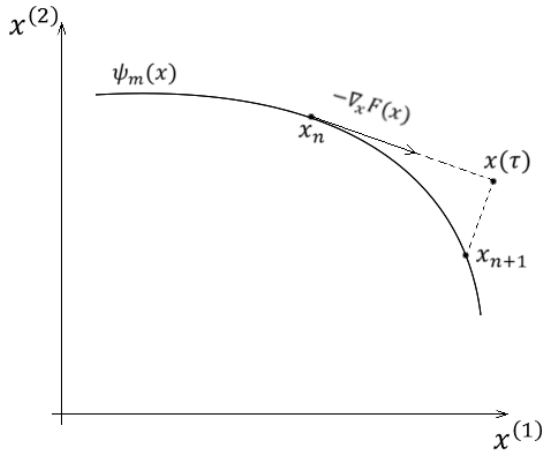


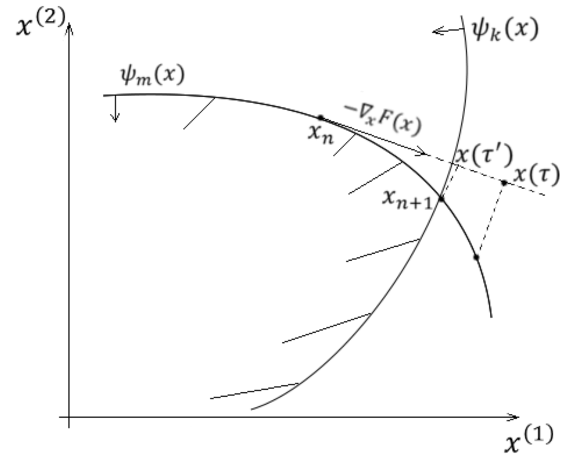
$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

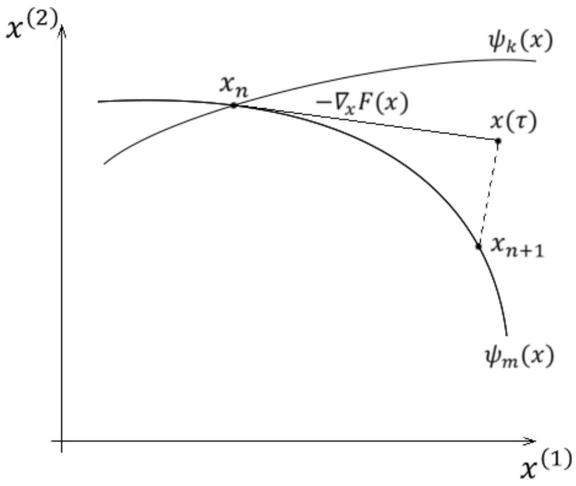
$$d = \frac{\nabla_x \psi_m(x)}{\|\nabla_x \psi_m(x)\|} - \frac{\nabla_x F(x)}{\|\nabla_x F(x)\|}$$

$$x: \psi(x) - \delta \le 0$$

Metoda rzutowania - Rozena

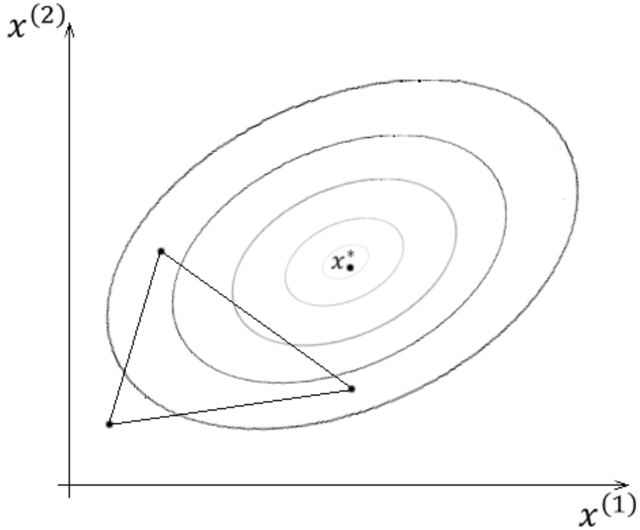






Metoda Compleks (Boxa)
Metoda Neldera-Meada (simplex)

$x_1\ x_2\ \dots x_K$ - kompleks w przestrzeni S -wymiarowej $K \geq S+1$



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq K} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{s} \sum_{s=1, s \neq H}^{K} x_s$$

$$x^* = (1+\alpha)\bar{x} - x_H$$

$$D_x\colon\ l_s \leq x^{(s)} \leq u_s\ s = 1, 2, \dots, S$$
$$l_m \leq x_m(x) \leq u_m\ m = 1, 2, \dots, M$$

$x_k = l_k + r_k|u_k - l_k|, r_k$ $-$ *liczba losowa* $\in [0,1], k = 1, 2, \dots, K$

Jeśli x_k nie należy do D_x to przesuń punkt w kierunku centroidu punktów zaakceptowanych

Metoda Complex

DANE: $x_0, \varepsilon, \mathrm{K}, \alpha$ $zalecane\ K = 2S, \alpha = 1.3$

Krok 0: $x_1\ x_2\ \ldots\ x_K \in D_x$ - complex początkowy, $n = 0$

Krok 1: Wyznacz promień minimalnej kuli zawierającej complex ρ_{min}

Krok 2: Sprawdź czy $\rho_{min} < \varepsilon$ jeśli tak to stop, w przeciwnym przypadku krok 3

Krok 3: $x_H \to F(x_H) = \max\limits_{1 \le s \le S+1} F(x_s),$

$\bar{x} = \frac{1}{S}\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq H}}^{K} x_s$ sprawdź czy $\bar{x} \in D_x$ jeśli nie to dodaj punkt do compleksu

Krok 4: $x^* = (1+\alpha)\bar{x} + \alpha x_H$

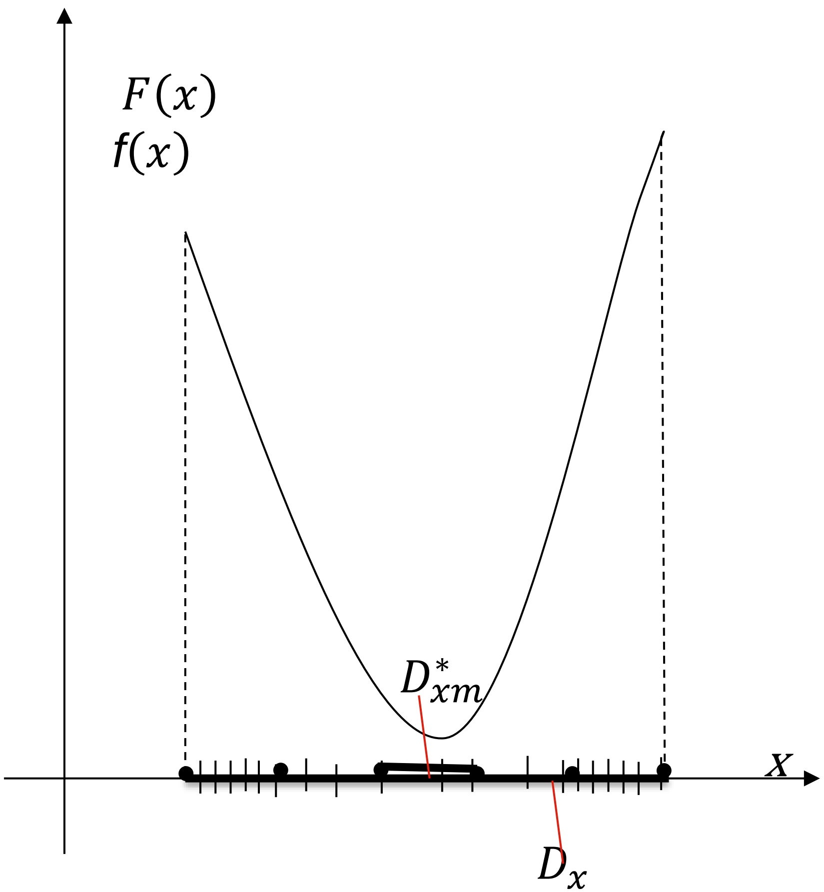
Krok 5: Zbadaj czy $x^* \in D_x$ jeśli tak to przejdź do kroku 7, w przeciwnym razie

Krok 6: $x^* = \bar{x} - (\bar{x} - x^*)/2$ aż $x^* \in D_x$

Krok 7: Jeśli $F(x^*) < F(x_H)$ idź do kroku 2

w przeciwnym razie idź do kroku 6

Poszukiwania losowe



$$x^* \to F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M}\|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

$$N_m - \textit{liczba wygenerowanych punktów w zbiorze } D_{xm}$$

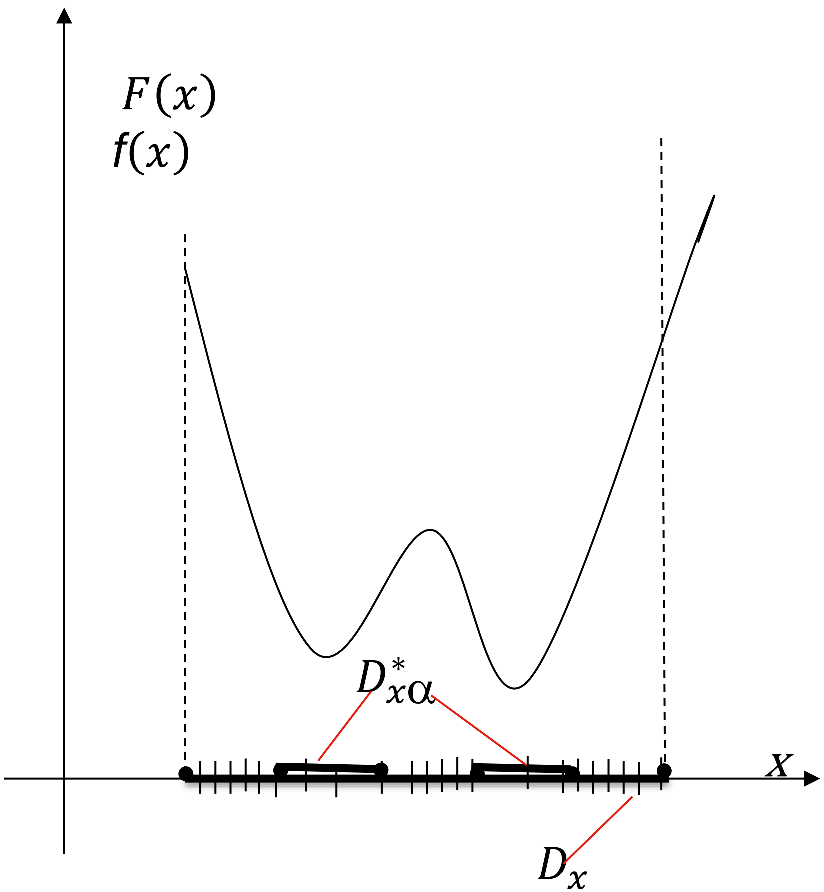
Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

$$D^*_{xm} \rightarrow N^*_m = \min_{1 \le m \le M} \{N_m\} \; \textit{jezeli } \|D_{xm}\| < \varepsilon \textit{ stop}, \forall \textit{punkt} \in D^*_{xm} \textit{ rozw.}$$

W przeciwnym przypadku tj. $\|D^*_{xm}\| \ge \varepsilon$ *podstaw* $D_x := D^*_{xm}$

i idź do kroku 1

Poszukiwania losowe



$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x)dx}$$

Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int\limits_{D_x} F(x)dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M}\|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

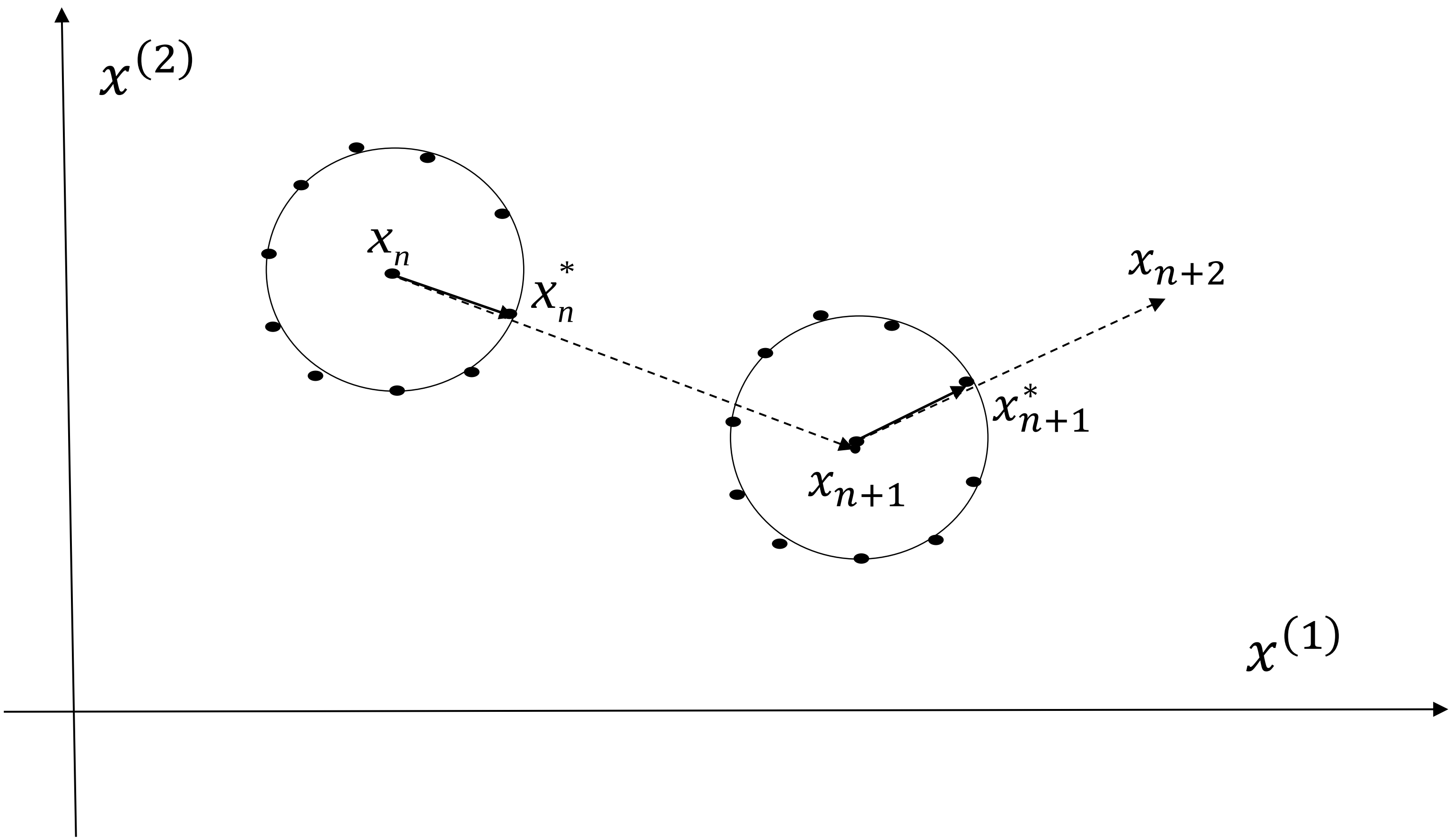
$$N_m - liczba\ wygenerowanych\ punktów\ w\ zbiorze\ D_{xm}$$

Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

$$D^*_{xm\alpha} \to N^*_{m\alpha} \le \alpha,\ D^*_{x\alpha} = \bigcup_m D^*_{xm\alpha}\ \ jezeli\ \left\|D^*_{x\alpha}\right\| < \varepsilon\ stop, \forall punkt \in D^*_{x\alpha}\ rozw.$$

W przeciwnym przypadku tj. $\left\|D^*_{x\alpha}\right\| \ge \varepsilon\ \ podstaw\ D_x := D^*_{x\alpha}$

i idź do kroku 1


$x^{(2)}$
x_n
x_n^*
x_{n+2}
x_{n+1}^*
x_{n+1}
$x^{(1)}$

Poszukiwania losowe - losowy wybór kierunku

Dane: $F(x), x_0, r, N, \varepsilon$

Krok 0: $n=0,\ x^* = x_n$

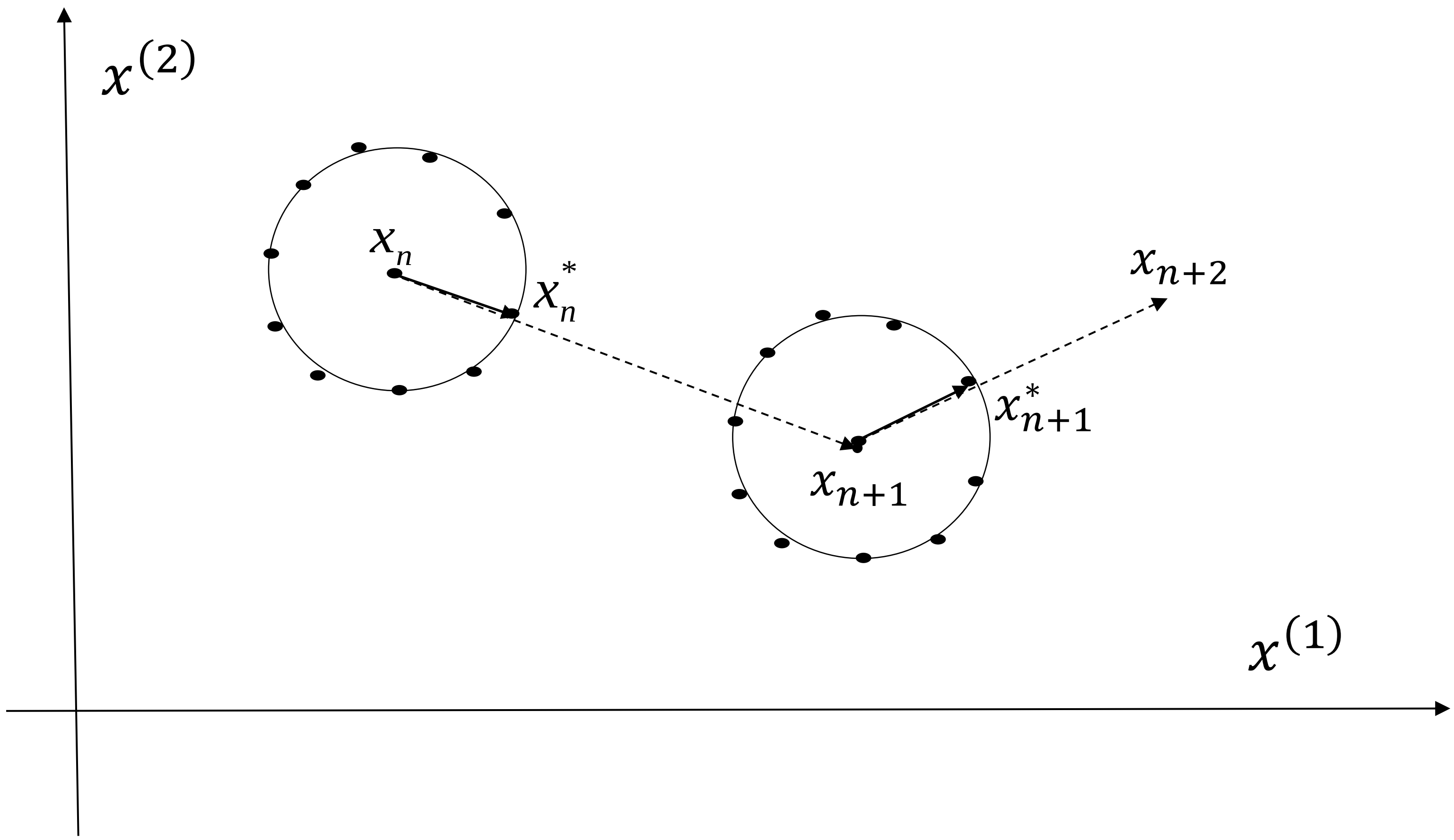
Krok 1: Generujemy N punktów wg rozkładu jednostajnego na w otoczeniu punktu x_n na okręgu o promieniu r.

Krok 2: Wybierz spośród wygenerowanych punktów punkt x_n^* dla którego funkcja celu przyjmuje minimum

Krok 3: Wyznacz kierunek $d = \dfrac{x_n^* - x_n}{\left\| x_n^* - x_n \right\|}$

Krok 4: Wyznacz punkt x_{n+1} jako minimum w kierunku d z punktu x_n

Krok 5: Jeżeli minimum to STOP $x_n \approx x^*$ w przeciwnym razie $n=n+1$ idź do Kroku 1


$x^{(2)}$
x_n
x_n^*
x_{n+2}
x_{n+1}^*
x_{n+1}
$x^{(1)}$

Bibliografia

- *Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes*, Jason Brownlee
- *Population-Based Incremental Learning: A Method for Integrating Genetic Search Based Function Optimization and Competitive Learning , Shumeet Baluja*, School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh,1994
- The Bees Algorithm – A Novel Tool for Complex Optimisation Problems, D.T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koç et. al, Cardiff University, 2006
- Zastosowanie Algorytmów Rojowych do Optymalizacji Parametrów w Modelach Układów Regulacji, Mirosław Tomera, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej Nr 46, 2015
- Automatic Tuning of a Retina Model for a Cortical Visual Neuroprosthesis Using a Multi-Objective Optimization Genetic Algorithm, Antonio Martínez-Álvarez, Rubén Crespo-Cano, Ariadna Díaz-Tahoces et. al., International Journal of Neural Systems 26/7, 2016

Dziękuję za uwagę