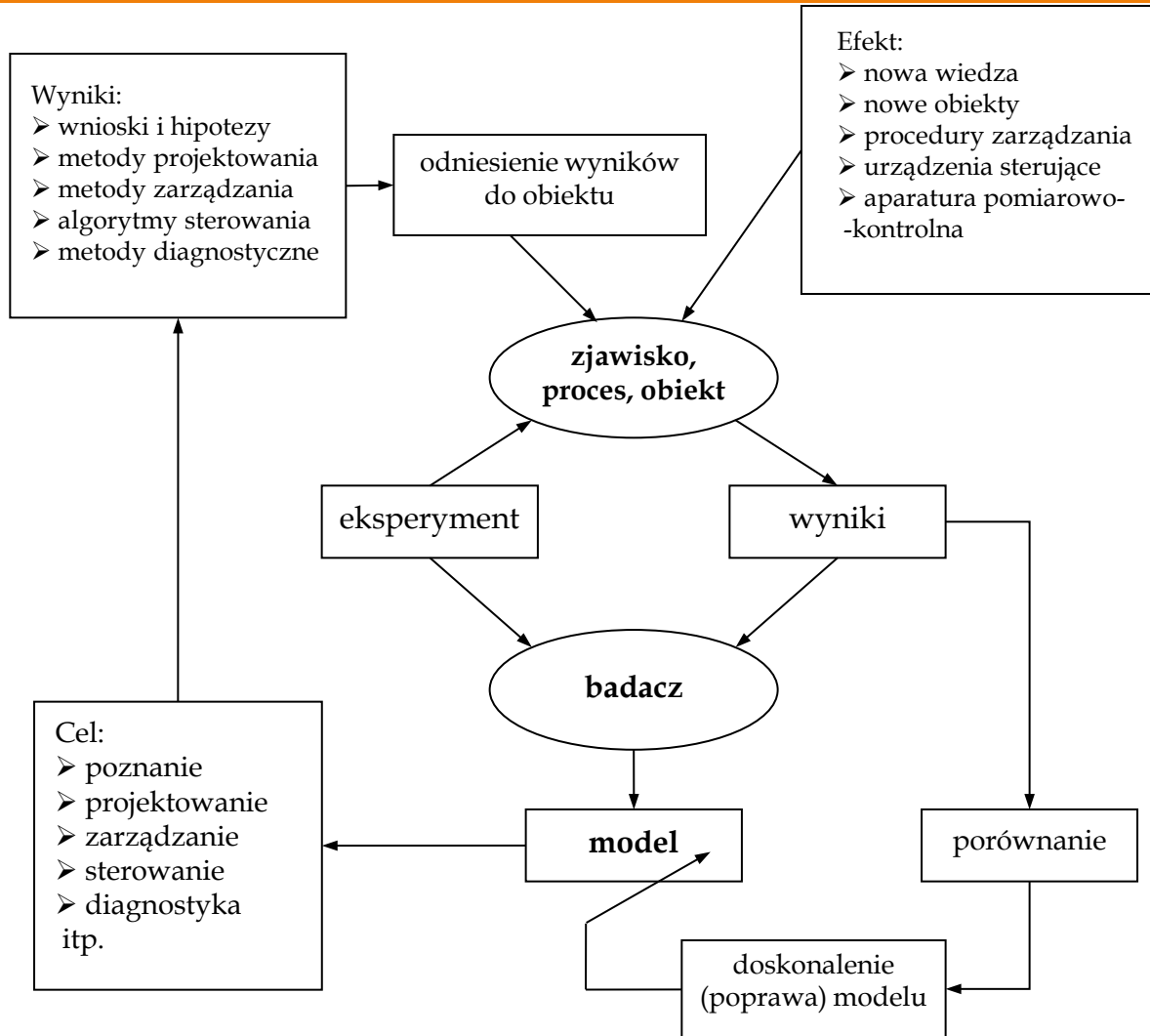


Optymalizacja systemów



Wykład 16. Podsumowanie

Model w badaniach systemowych



Sformułowanie zadania wspomagania decyzji

Decyzja: różne typy elektrowni



Elektrownia wodna

$x^{(1)}$



Elektrownia atomowa

$x^{(2)}$



Elektrownia wiatrowa

$x^{(3)}$

Obrazy:

<http://ziemianarozdrozu.pl/encyklopedia/67/hydroenergetyka/>

http://kresy24.pl/showNews/news_id/5871/

<http://windy-future.info/2009/10/13/large-wind-turbine/>

$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ - obciążenie elektrowni –
zmienne decyzyjne

c_1, c_2, c_3 – koszt jednostkowy
wytworzenia energii

Cel: minimalizacja kosztów wytworzenia: $F(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)}$

Ograniczenia: – spełnienie zapotrzebowania na energię: $x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} \geq \beta$
– możliwości poszczególnych elektrowni: $0 \leq x^{(n)} \leq \alpha_n, n = 1, 2, 3$

Sformułowanie zadania wspomagania decyzji

Zmienne decyzyjne: $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(S)} \end{bmatrix}$

Funkcja celu: $y = F(x)$

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (zwykle określony przez wskazanie ograniczeń):

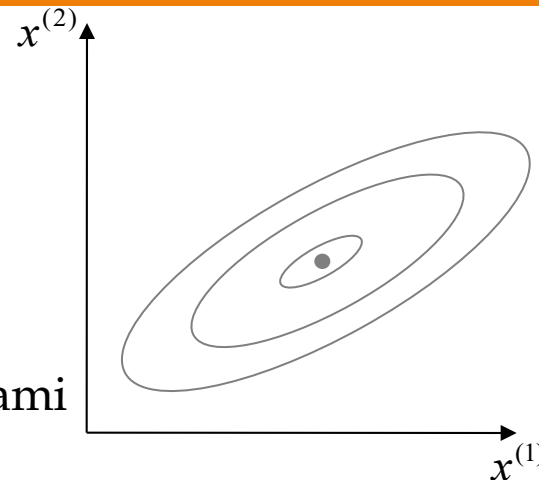
$$x \in \mathcal{D}_x$$

Decyzja optymalna: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x), \quad \min F(x) = -\max(-F(x))$

Decyzja zadowalająca: $\tilde{x} \rightarrow F(\tilde{x}) \leq F(x^*) + \alpha = \gamma \wedge x \in \mathcal{D}_x$

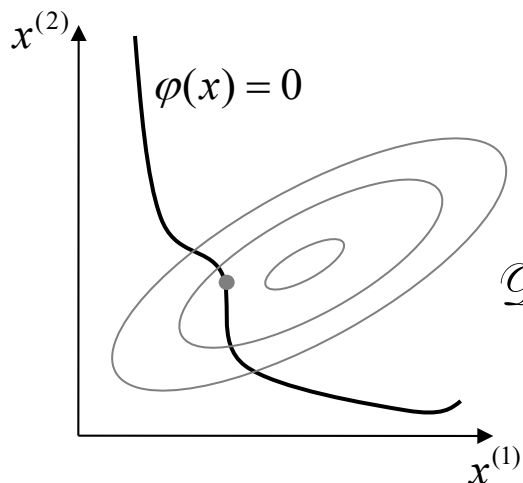
Typowe zadania decyzyjne

Zadanie decyzyjne bez ograniczeń: $\mathcal{D}_x = \mathcal{R}^S$



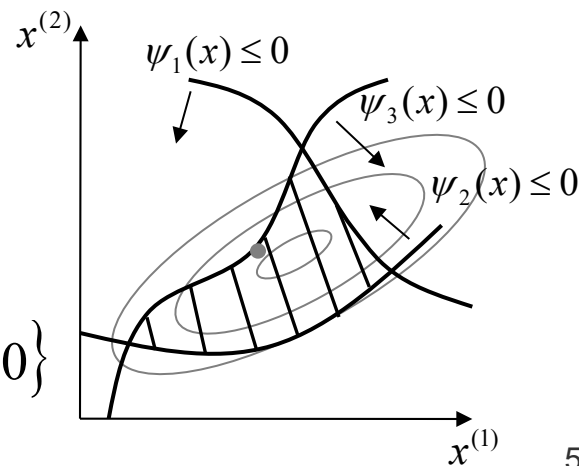
Zadanie decyzyjne z ograniczeniami równościowymi:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_L(x) = 0, L \leq S\}$$



Zadanie decyzyjne z ograniczeniami nierównościami:

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0\}$$



Analityczne metody optymalizacji

- ⌘ Zadanie optymalizacji bez ograniczeń
- ⌘ Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi – metoda współczynników Lagrange’a
- ⌘ Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi – metoda Kuhna-Tuckera

Zadanie optymalizacji bez ograniczeń

Zadanie optymalizacji: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x = \mathcal{R}^S} F(x)$

Założenie: $F(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną.

Warunkiem koniecznym aby x^* było minimum lokalnym jest:

$$\nabla_x F(x) \Big|_{x^*} = 0_S$$

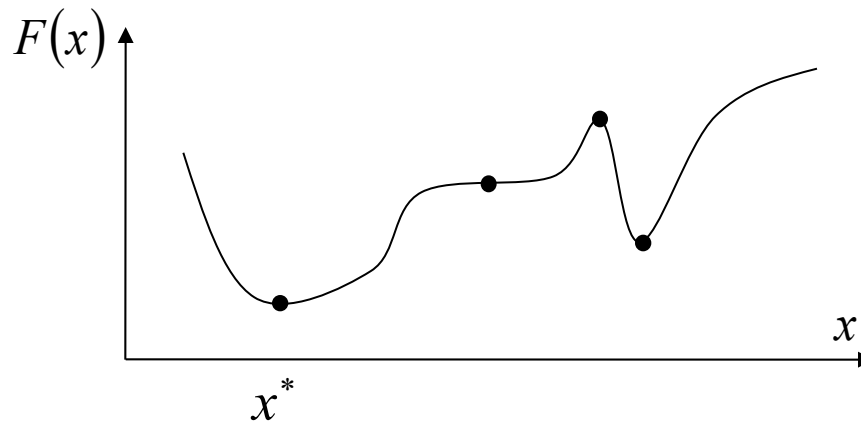
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pseudo - wypukłą, powyższe równanie jest warunkiem koniecznym i wystarczającym aby x^* było minimum globalnym

Jeżeli $H(x)$ jest dodatnio pół określona $\forall x \in \mathcal{R}^S$ to rozwiązanie powyższego równania jest minimum globalnym

Jeżeli $H(x)$ jest dodatnio określona $\forall x \in \mathcal{R}^S$ powyższe równanie ma jedno rozwiązanie x^* i jest ono minimum globalnym

Zadanie optymalizacji bez ograniczeń

Równanie $\nabla_x F(x)|_{x^*} = 0_S$ może mieć wiele rozwiązań



Warunki optymalności drugiego rzędu:

Jeżeli $H(x^*)$ jest dodatnio pół określona w punkcie x^*
to x^* jest minimum lokalnym

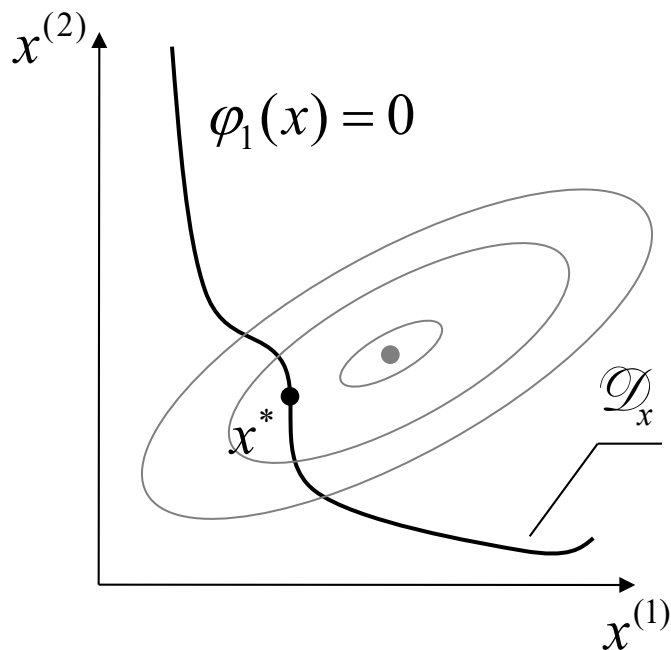
Jeżeli $H(x^*)$ jest ujemnie pół określona w punkcie x^*
to x^* jest maksimum lokalnym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Zadanie optymalizacji: $x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x^* \in \mathcal{D}_x} F(x)$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathcal{R}^S : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \dots, \varphi_L(x) = 0, L \leq S \right\}$$



$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathcal{R}^S : \varphi(x) = 0_L, L \leq S \right\}$$

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_L(x) \end{bmatrix} \quad 0_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} L - \text{zer}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Metoda współczynników Lagrange' a

Funkcja Lagrange' a:

$$L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \varphi_l(x) = F(x) + \lambda^T \varphi(x)$$

gdzie: $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_L(x) \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_L \end{bmatrix}$ - wektor współczynników Lagrange' a

Warunki konieczne optymalności:

$$\nabla_x L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_L \Leftrightarrow \text{rank } G(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} G(x) & \vdots & -\nabla_x F(x) \end{bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} \nabla_x \varphi_1(x) & \vdots & \nabla_x \varphi_2(x) & \vdots & \cdots & \vdots & \nabla_x \varphi_L(x) \end{bmatrix}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Powyższy układ równań może mieć wiele rozwiązań

Warunki optymalności drugiego rzędu:

Oznaczmy: $H_L(x) = \nabla_{xx} L(x, \lambda)$

Jeżeli $H_L(x^*)$ jest dodatnio określona w punkcie x^*
to x^* jest minimum lokalnym

Jeżeli $H_L(x^*)$ jest ujemnie określona w punkcie
to x^* jest maksimum lokalnym x^*

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest wypukła, a ograniczenia są liniowe czyli mają postać $\varphi_l(x) = p_l^T x - \alpha_l = 0$, $l = 1, 2, \dots, L$ to powyższy układ równań ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem optymalnym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

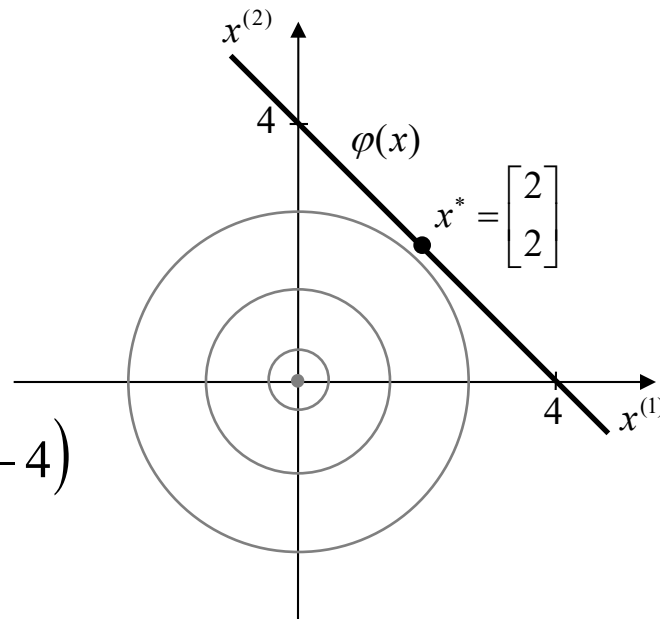
Metoda mnożników Lagrange' a

☞ Metoda Lagrange' a - Przykład 1

$$F(x) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2$$

$$\varphi(x) = x^{(1)} + x^{(2)} - 4 = 0$$

$$L(x, \lambda) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2 + \lambda \left(x^{(1)} + x^{(2)} - 4\right)$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

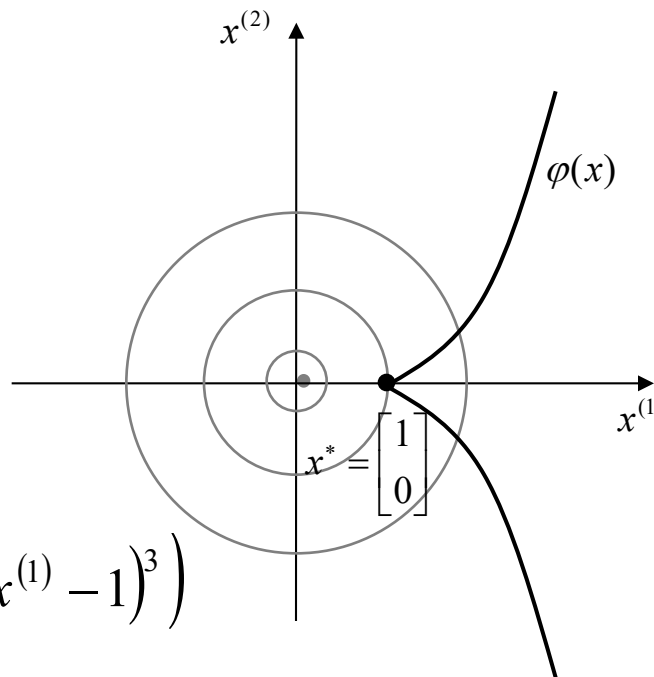
Metoda mnożników Lagrange' a

∞ Metoda współczynników Lagrange' a – Przykład 2
rozwiązanie nieregularne

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$

$$\varphi(x) = (x^{(2)})^2 - (x^{(1)} - 1)^3 = 0$$

$$L(x, \lambda) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \lambda \left((x^{(2)})^2 - (x^{(1)} - 1)^3 \right)$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją ciągłą, różniczkowalną i wypukłą oraz ograniczenia $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_L(x)$ są liniowe to układ równań:

$$\nabla_x L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) \Big|_{x^*, \lambda^*} = 0_L$$

ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem zadania optymalizacji z ograniczeniami równościowymi.

Powyższy układ równań w tym przypadku jest warunkiem koniecznym i wystarczającym

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami równościowymi

Metoda mnożników Lagrange' a

∞ Uogólniona metoda współczynników Lagrange' a

$$\nabla_x L(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S$$

$$1^\circ \quad \lambda_0 \neq 0 \quad \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \frac{\lambda_l}{\lambda_0} \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \Rightarrow \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda'_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S$$

$$\lambda_0 = 1 \quad \nabla_x F(x) + \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \quad \text{- z tego warunku otrzymamy}$$

rozwiązania regularne

$$2^\circ \quad \lambda_0 = 0 \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l \nabla_x \varphi_l(x) = 0_S \quad \text{- z tego warunku otrzymamy rozwiązania}$$

nieregularne

Podobnie jak poprzednio otrzymane rozwiązania wymagają zbadania warunków drugiego rzędu czyli zbadania określoności macierzy:

$$H_L(x, \lambda, \lambda_0) = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda, \lambda_0).$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

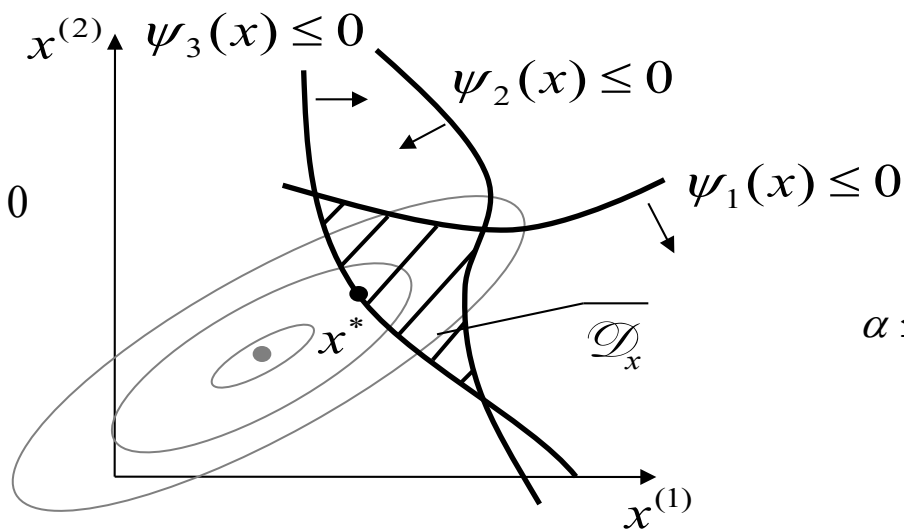
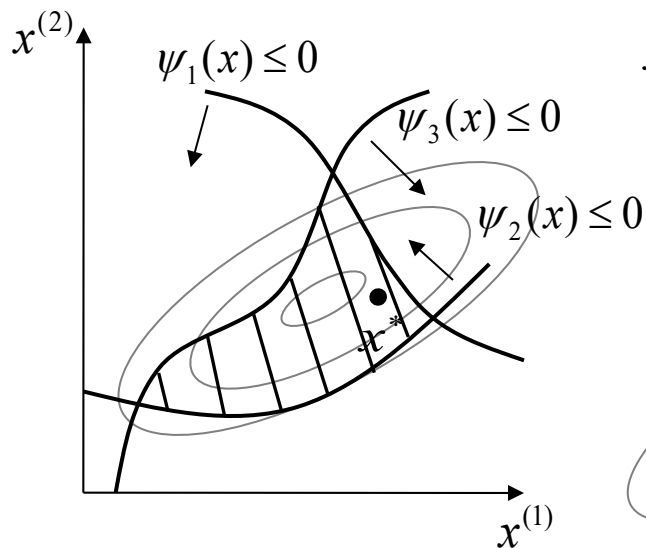
Metoda Kuhna – Tucker’a

Zadanie optymalizacji:

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0 \right\}$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \psi(x) \leq 0_M \right\} \quad \text{gdzie:} \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_M(x) \end{bmatrix} \quad 0_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left\} M$$



$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}$$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \forall_{s=1, \dots, S} \alpha_s \leq \beta_s$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami

Metoda Kuhna – Tucker'a

Funkcja Lagrange' a:

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T \psi(x) \Leftrightarrow L(x, \mu) = F(x) + \sum_{m=1}^M \mu_m \psi_m(x)$$

gdzie: $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_M \end{bmatrix}$ - wektor współczynników Lgrange' a

Warunki konieczne optymalności:

$$\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0_S$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$\nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$\mu^* \geq 0_M$$

$\Leftrightarrow$ gdy rozwiązanie jest regularne

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_S \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_S \end{bmatrix}$$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \forall_{s=1, \dots, S} \alpha_s \leq \beta_s$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

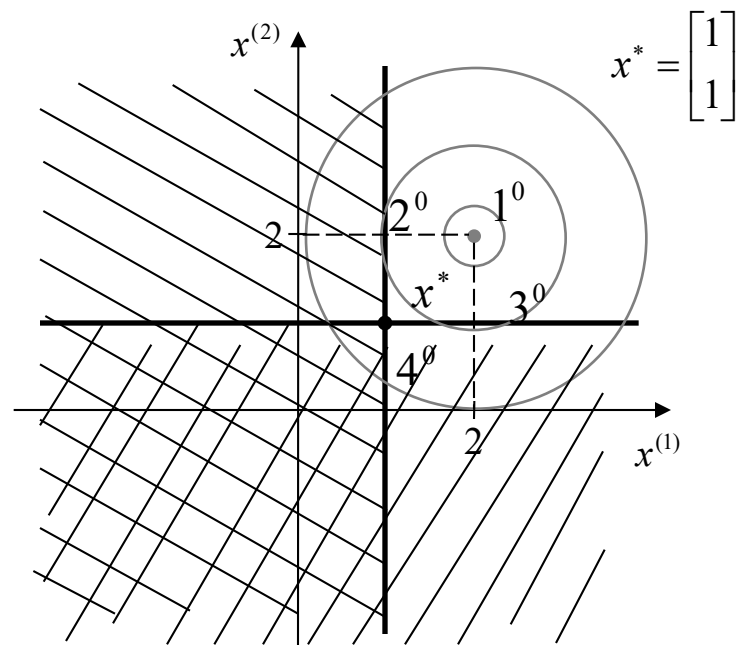
Metoda Kuhna – Tucker'a

Przykład 1

$$F(x) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)} - 2)^2$$

$$\psi_1(x) = x^{(1)} - 1 \leq 0$$

$$\psi_2(x) = x^{(2)} - 1 \leq 0$$



$$L(x, \lambda) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)} - 2)^2 + \mu_1(x^{(1)} - 1) + \mu_2(x^{(2)} - 1)$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami

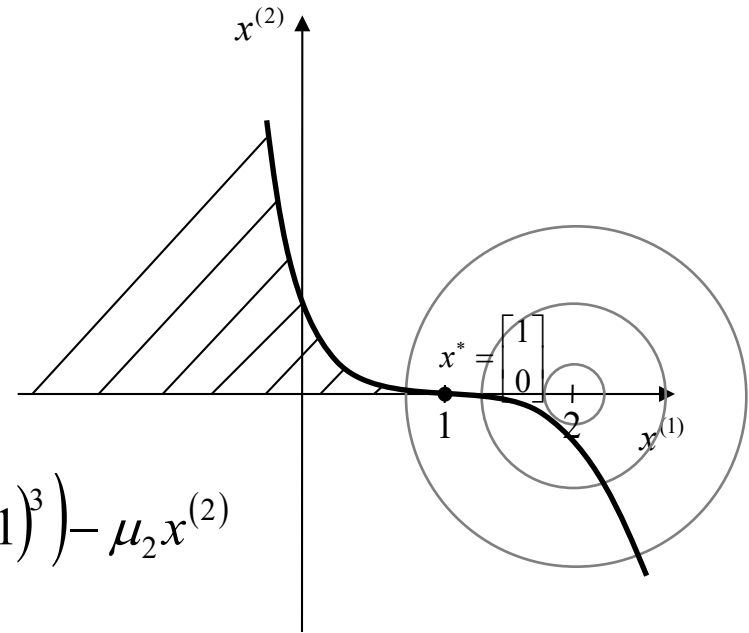
Metoda Kuhna – Tucker'a

Przykład 2 – rozwiązanie nieregularne

$$F(x) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)})^2$$

$$\psi_1(x) = x^{(2)} + (x^{(1)} - 1)^3 \leq 0$$

$$\psi_2(x) = -x^{(2)} \leq 0$$



$$L(x, \lambda) = (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)})^2 + \mu_1 (x^{(2)} + (x^{(1)} - 1)^3) - \mu_2 x^{(2)}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi

Metoda Kuhna – Tucker’a Warunki regularności rozwiązania

1. Karlina: ograniczenia $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ - liniowe
2. Slatera: ograniczenia $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ - wypukłe oraz zbiór rozwiązań dopuszczalnych ma niepuste wnętrze
3. Fiacco – Mac Cormica: w punkcie optymalnym gradienty wszystkich ograniczeń aktywnych są liniowo niezależne, czyli:

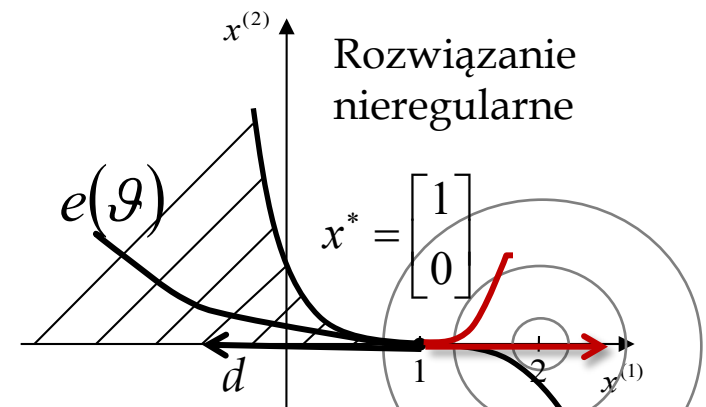
$$\forall m \in I(x^*) \quad \nabla_x \psi_m(x^*) \Big|_{x=x^*} \text{ są liniowo niezależne}$$

4. Zangwila: $\mathcal{D}(x^*) = \overline{D}(x^*)$
5. Kuhna – Tucker’a: dla każdego kierunku $d \in \mathcal{D}(x^*)$ istnieje krzywa regularna rozpoczynająca się w punkcie x^* i styczna do tego kierunku

$$\forall d \in \mathcal{D}(x^*) \quad \exists e(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, 1]$$

- $e(0) = x^*$
- $e(\vartheta) \in D_x \quad \forall \vartheta \in [0, 1]$
- $\frac{de(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \tau \cdot d$

$$e(\vartheta) = \begin{bmatrix} e_1(\vartheta) \\ e_2(\vartheta) \\ \vdots \\ e_s(\vartheta) \end{bmatrix}$$



Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościovymi Metoda Kuhna – Tucker'a

Warunki konieczna i wystarczające:

Jeżeli funkcje $F(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ są ciągłe i różniczkowalne oraz funkcja $F(x)$ jest funkcją pseudo – wypukłą, a ograniczenia $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)$ są funkcjami quasi – wypukłymi to wkład równań i nierówności:

$$\begin{aligned}\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &= 0_S \\ \mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &= 0 \\ \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} &\leq 0_M \\ \mu^* &\geq 0_M\end{aligned}$$

ma jedno rozwiązanie i jest ono rozwiązaniem zadania optymalizacji z ograniczeniami nierównościovymi

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : x \geq 0_S, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \geq 0_S$$

$$\nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$x^T \nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$x^* \geq 0_S$$

$$\mu^* \geq 0_M$$

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \lambda, \mu) = F(x) + \lambda^T \varphi(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_L$$

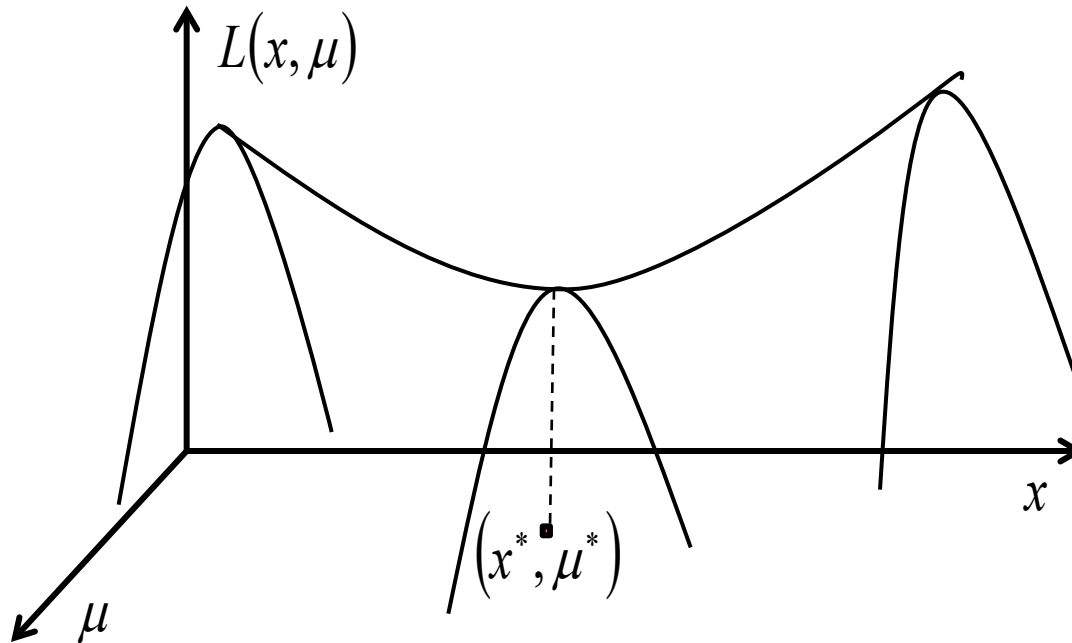
$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$$

$$\nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$\mu^* \geq 0_S$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami - Punkt siodłowy

Punkt siodłowy (x^*, μ^*)



$$\begin{aligned} L(x^*, \mu^*) &\leq L(x, \mu^*) \quad \forall x \in \mathcal{D}(x) \subseteq \mathcal{R}^s \\ L(x^*, \mu) &\leq L(x^*, \mu^*) \quad \forall \mu \geq 0_M \\ L(x^*, \mu^*) &= \min_{x \in \mathcal{D}(x)} \max_{\mu \geq 0_M} L(x, \mu) \end{aligned}$$

Zadanie optymalizacji z ograniczeniami nierównościami - Punkt siodłowy

Punkt (x^*, μ^*) jest punktem siodłowym $(x \in \mathcal{D}(x), \mu \geq 0_M) \Leftrightarrow$

1. x^* – minimalizuje $L(x, \mu)$
2. $\psi_m(x^*) \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$
3. $\mu^* \psi_m(x^*) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$

Jeżeli (x^*, μ^*) jest punktem siodłowym funkcji Lagrange'a $L(x, \mu)$ to jest rozwiązaniem zadania optymalizacji:

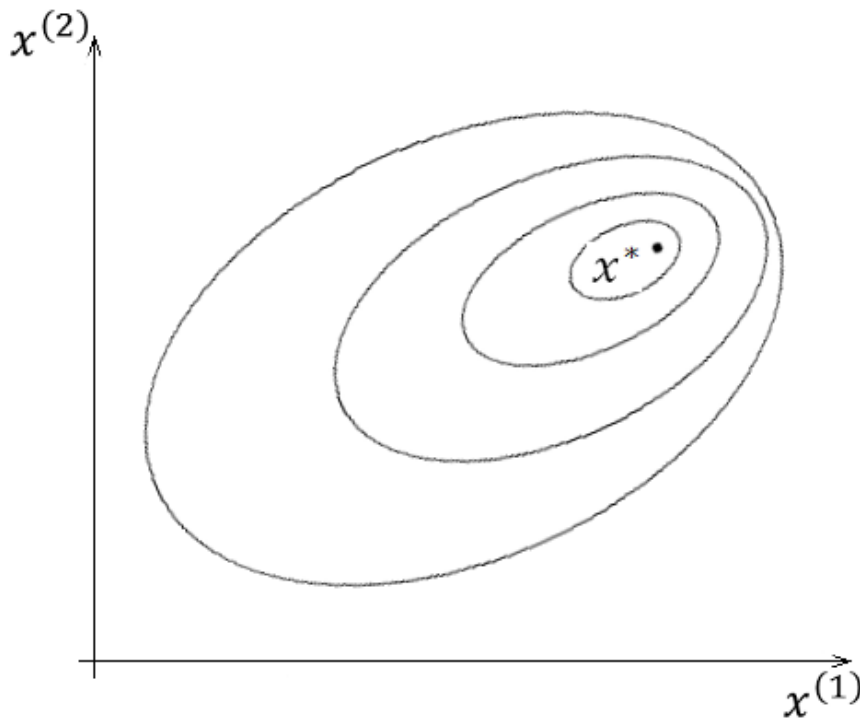
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \psi_1(x) \leq 0, \psi_2(x) \leq 0, \dots, \psi_M(x) \leq 0\}$$

Numeryczne metody optymalizacji



$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$



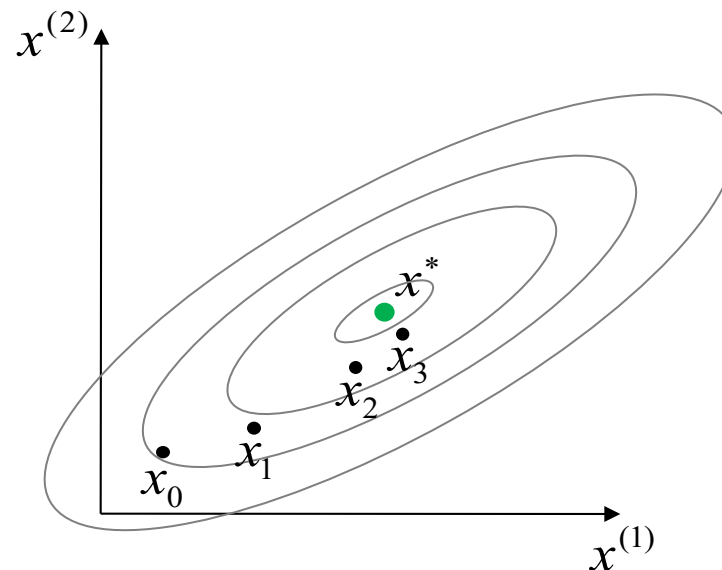
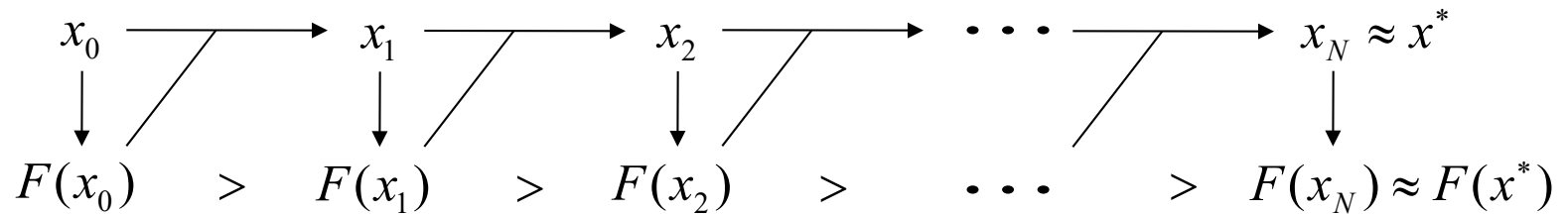
Problemy analityczne:

1. Nieliniowa złożona funkcja celu F i ograniczeń φ oraz ψ .
2. Nieróżniczkowalność funkcji F , φ oraz ψ .
3. Nie jest znana postać analityczna funkcji F , φ oraz ψ , można jedynie „zmierzyć” wartość funkcji
4. Duży wymiar wektora zmiennych decyzyjnych.

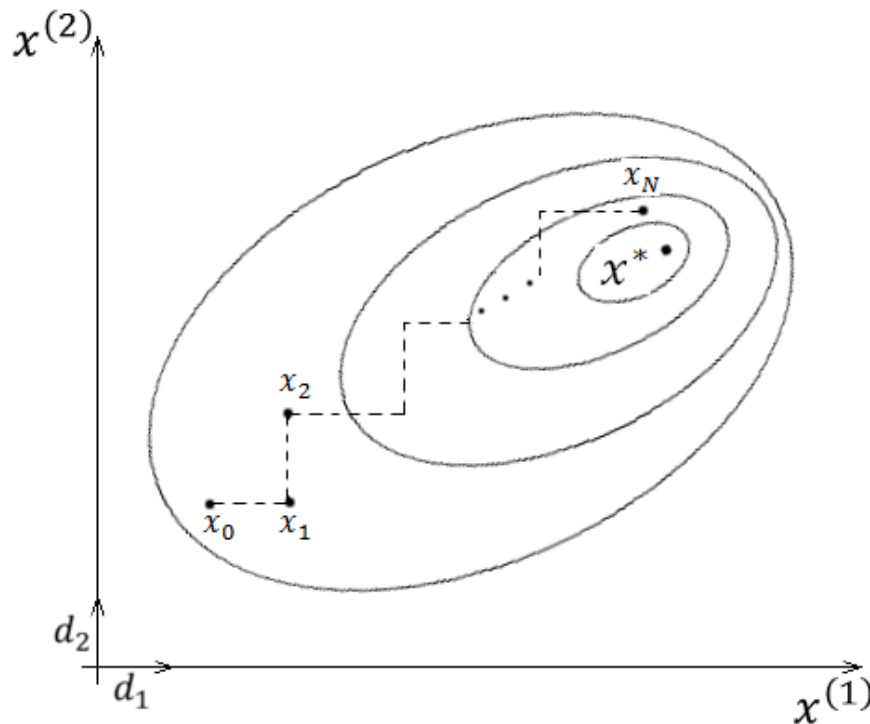
Metody numeryczne

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x^* \in \mathcal{D}_x} F(x),$$

Konstruujemy ciąg przybliżeń na podstawie wartości funkcji $F(x)$ w danym punkcie x



Numeryczne metody optymalizacji



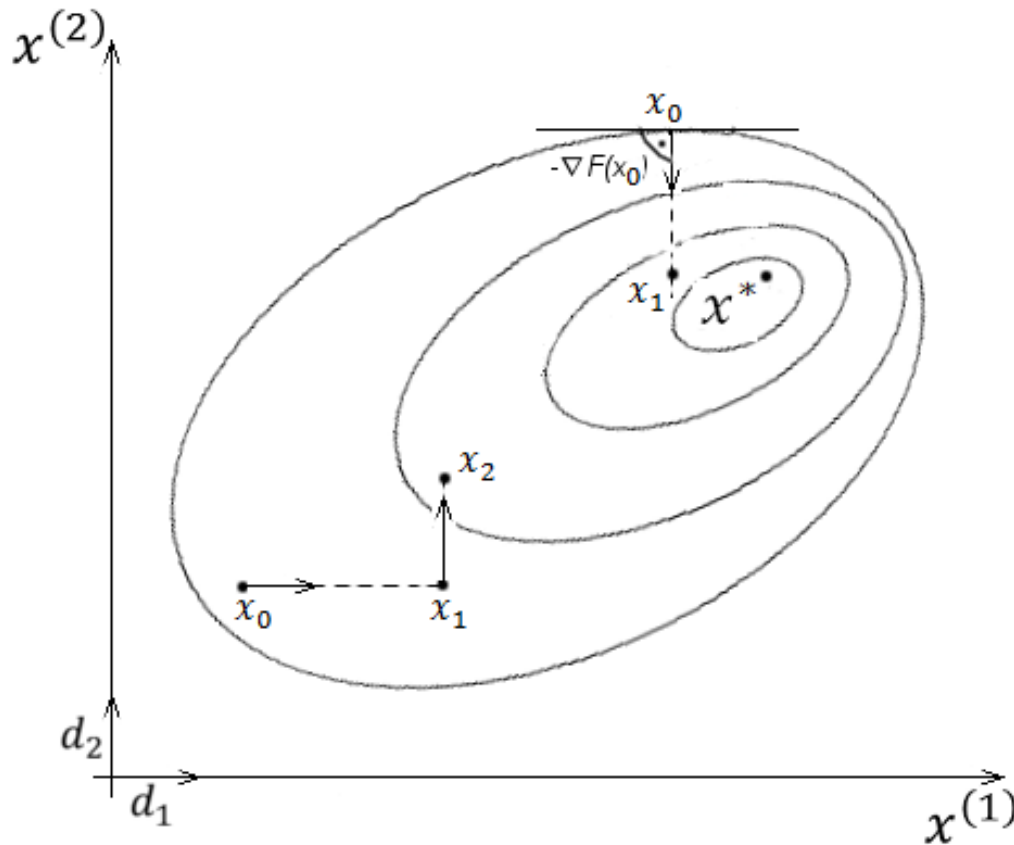
Algorytm

$$x_{n+1} = \Psi(x_n), x_0$$

- Wybór kierunku poszukiwań.
- Optymalizacja w kierunku.
- Warunki zatrzymania procedury.

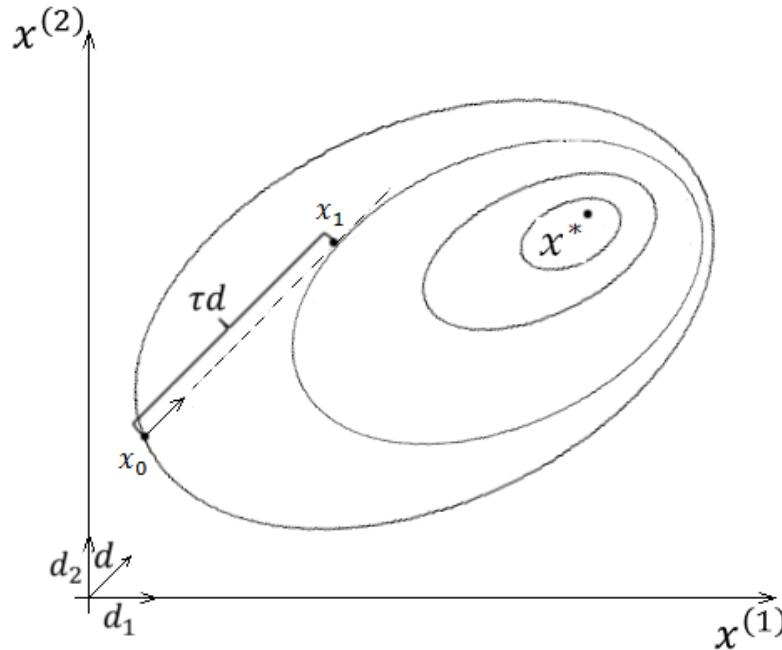
$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_N \approx x^*$$
$$F(x_0) > F(x_1) > \dots > F(x_n) > \dots > F(x_N) \approx F(x^*)$$

Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bez gradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.
- Inne

Optymalizacja w kierunku



x_0 - punkt początkowy
 x_1 - punkt końcowy
 d - kierunek
 τ - długość kroku w kierunku

$$\tau^* \rightarrow F(x_0 + \tau^* d) = \min_{\tau} F(x_0 + \tau d)$$

x_0, d - ustalone $F(x_0 + \tau d) \triangleq f(\tau)$

$f(\tau)$ - funkcja jednej zmiennej (długości kroku τ)

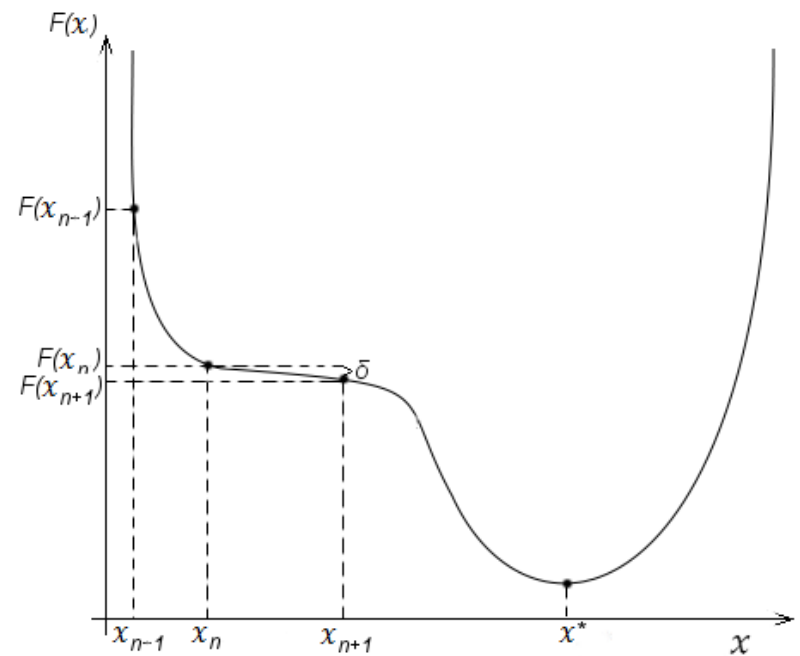
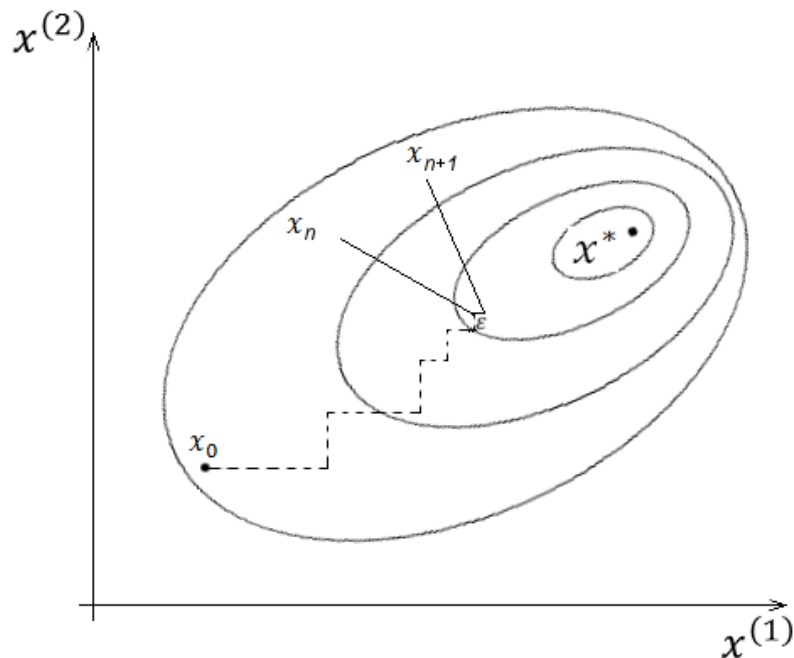
$$\tau^* \rightarrow f(\tau^*) = \min_{\tau} f(\tau)$$

optymalizacja w kierunku $\equiv$ optymalizacja funkcji jednej zmiennej

Warunki zatrzymania procedury

$$\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon; \quad |F(x_{n+1}) - F(x_n)| < \delta; \quad \frac{|F(x_{n+1}) - F(x_n)|}{\|x_{n+1} - x_n\|} < \varrho$$

Uwaga!

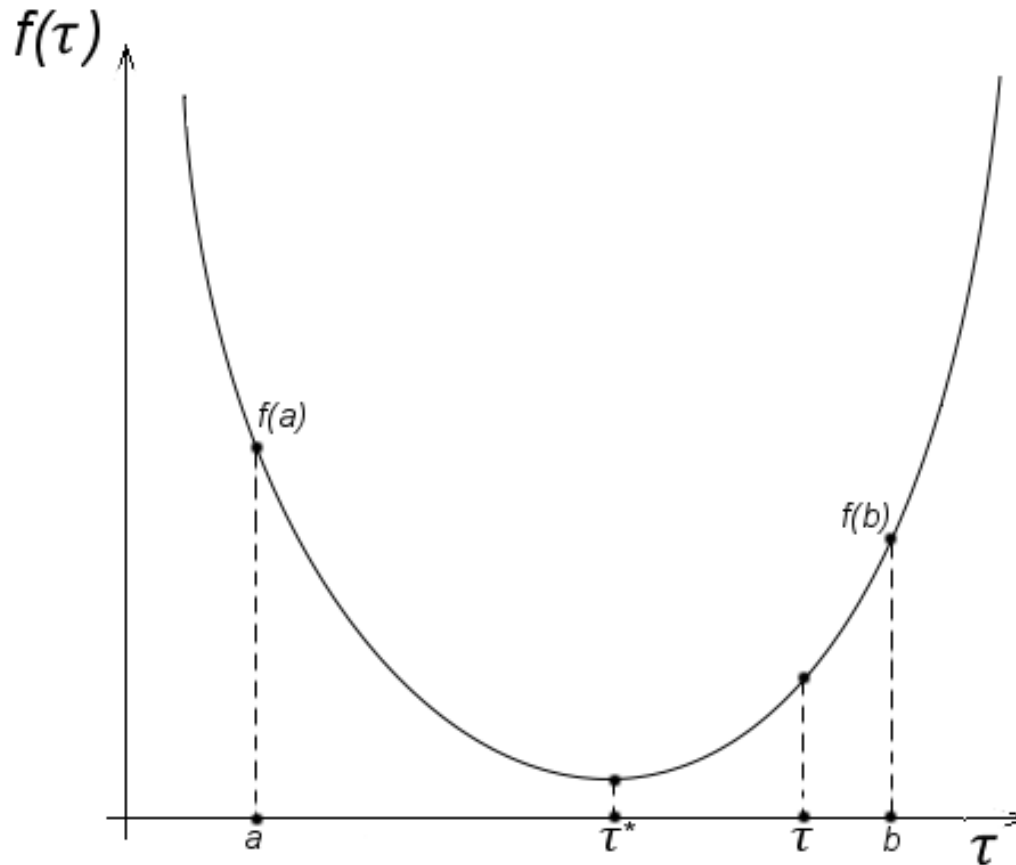


Metody optymalizacji w kierunku

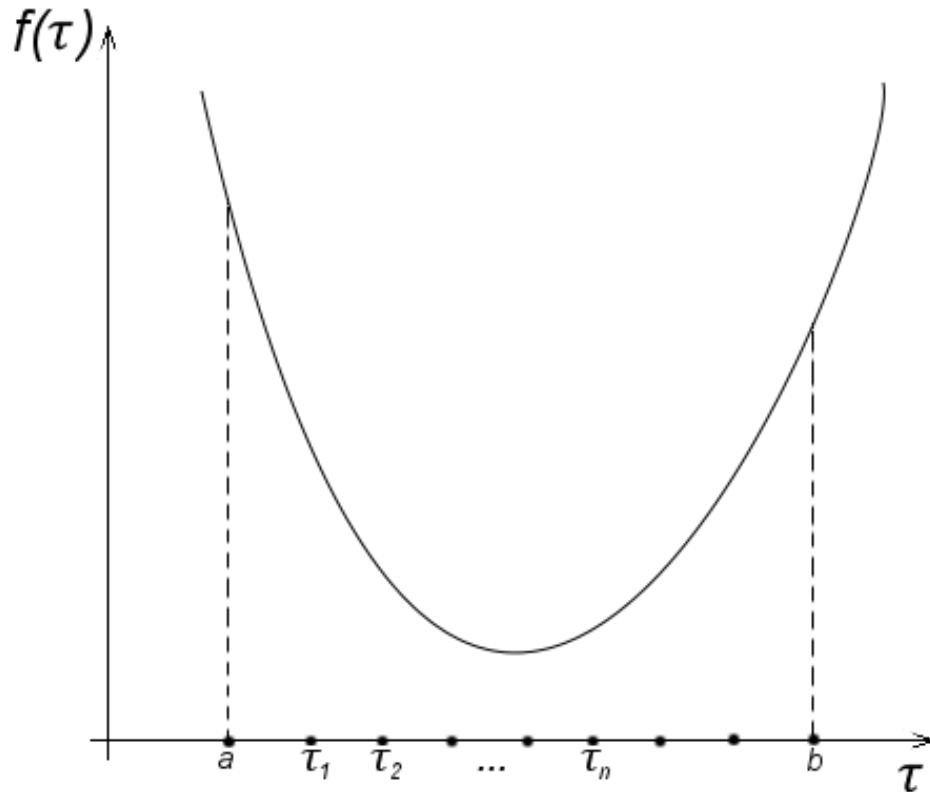
- ✎ Metody optymalizacji w kierunku
 - Podział równomierny
 - Podział na połowę
 - Złoty podział
 - Aproksymacji kwadratowej
 - Metoda pierwszej pochodnej
 - Metoda znaku pochodnej
 - Metoda Newtona
 - Metoda Bolzano

Metody zawężania odcinka

Założenie: $\tau^* \in [a, b]$



Podział równomierny



$N = \left\lceil \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$ - liczba wyliczeń wartości funkcji

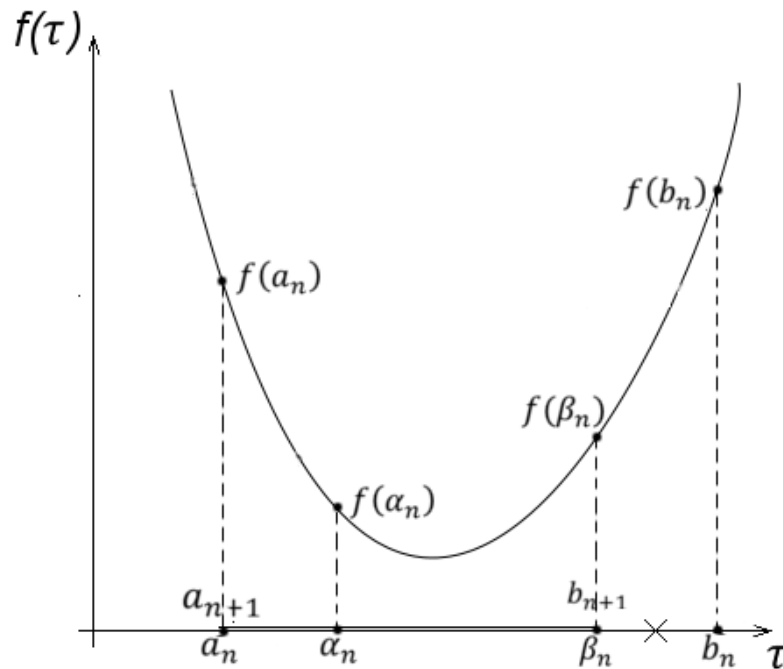
$$\tau_0 = a$$

$$\tau_n = \tau_0 + n\varepsilon$$

$$\tau^* \approx \tilde{\tau} \rightarrow f(\tilde{\tau}) = \min_{1 \leq n \leq N} \{f(\tau_n)\}$$

Zawężanie odcinka

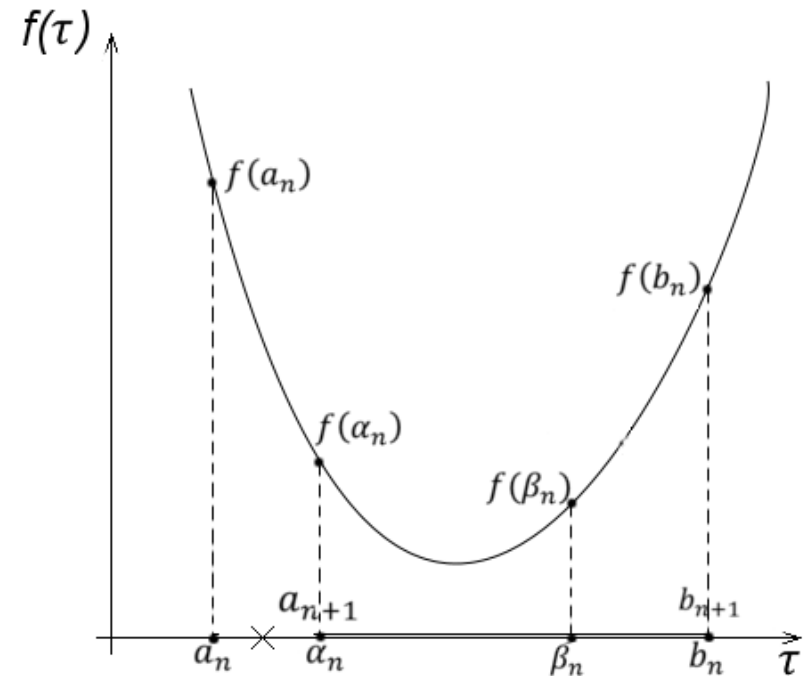
$f(\alpha_n)? f(\beta_n)$



$$f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := \beta_n$$

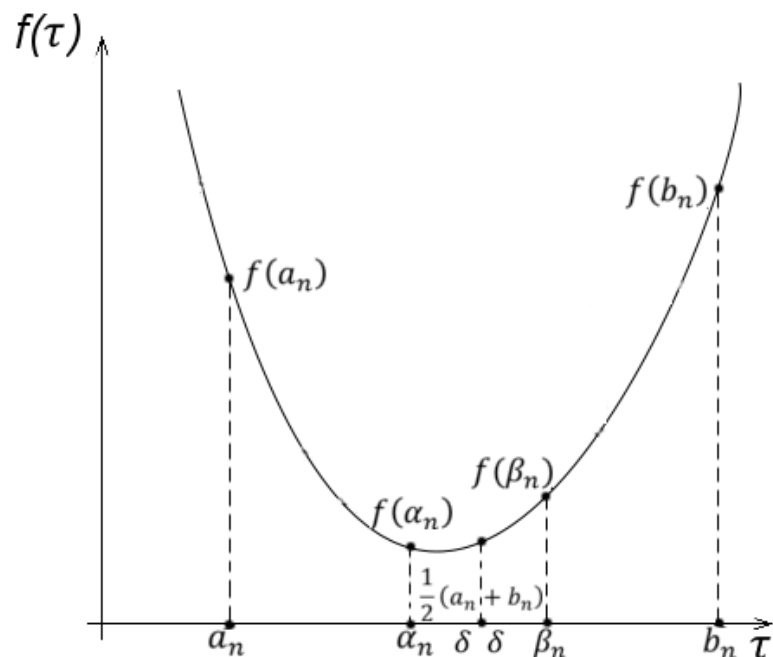


$$f(\alpha_n) > f(\beta_n)$$

$$a_{n+1} := \alpha_n$$

$$b_{n+1} := b_n$$

Metoda podziału na połowę



$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \delta$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \delta$

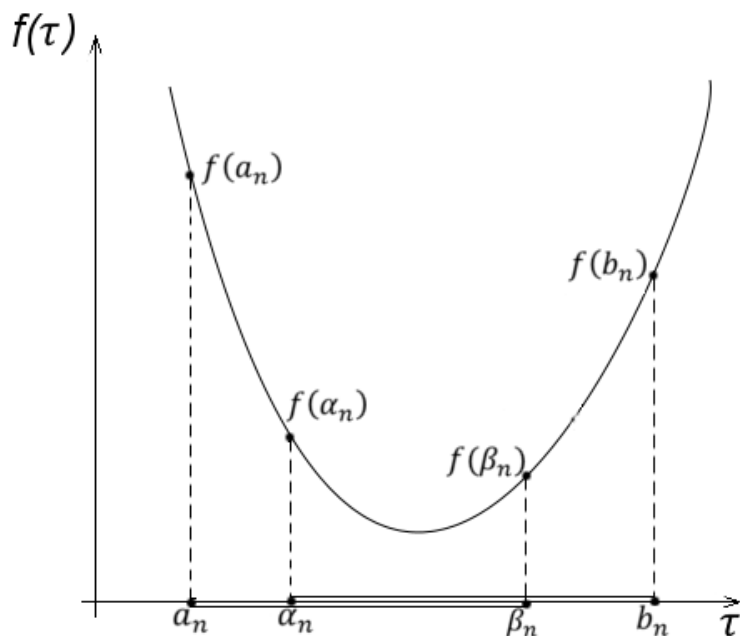
$$\beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \delta$$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to
 $a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n$,
 w przeciwnym razie

$$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n.$$

Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \geq \varepsilon$ to
 $n := n + 1$, idź do kroku 1,
 w przeciwnym razie
 $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ (STOP)

Metoda γ podziału



$$\frac{b_n - \alpha_n}{b_n - a_n} = \frac{\beta_n - a_n}{b_n - a_n} = \gamma$$

$$\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$$

$$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$$

$N = ?$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma$

Krok 0: $n = 0$

Krok 1: $\alpha_n = b_n + \gamma(a_n - b_n)$

$\beta_n = a_n + \gamma(b_n - a_n)$

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to

$a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n,$

w przeciwnym razie

$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n.$

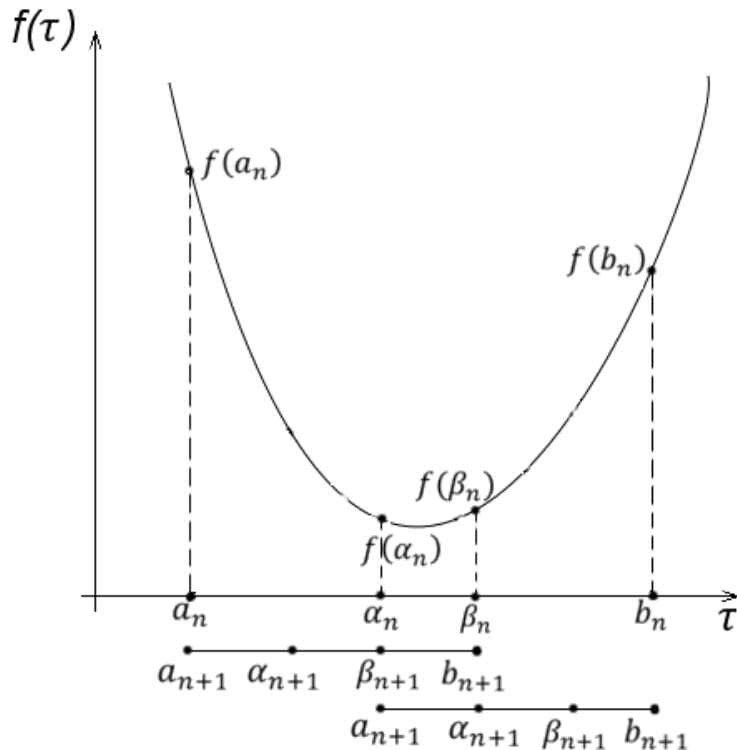
Krok 3: Jeśli $|b_{n+1} - a_{n+1}| \geq \varepsilon$ to

$n := n + 1$, idź do kroku 1,

w przeciwnym razie

$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$ (STOP)

Metoda złotego podziału



$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

$$N = ?$$

Dane: $a_0, b_0, \varepsilon, \gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Krok 0: $n = 0$

$$\alpha_0 = b_0 + \gamma(a_0 - b_0)$$

$$\beta_0 = a_0 + \gamma(b_0 - a_0)$$

Krok 1: Jeśli $|b_n - a_n| < \varepsilon$, to
 $\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ (STOP)

w przeciwnym razie → krok 2

Krok 2: Jeśli $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$ to

$$a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := \beta_n,$$

$$\beta_{n+1} := \alpha_n,$$

$$\alpha_{n+1} := \beta_n + \gamma(a_n - b_n)$$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

w przeciwnym razie

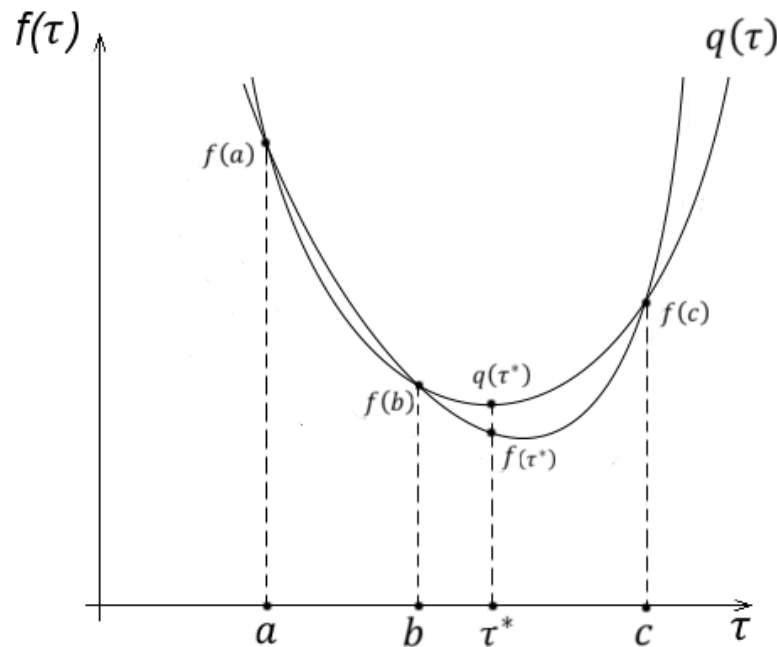
$$a_{n+1} := \alpha_n, b_{n+1} := b_n,$$

$$\alpha_{n+1} := \beta_n,$$

$$\beta_{n+1} := \alpha_n + \gamma(b_n - \alpha_n)$$

$n := n + 1$, idź do kroku 1

Metoda aproksymacji kwadratowej



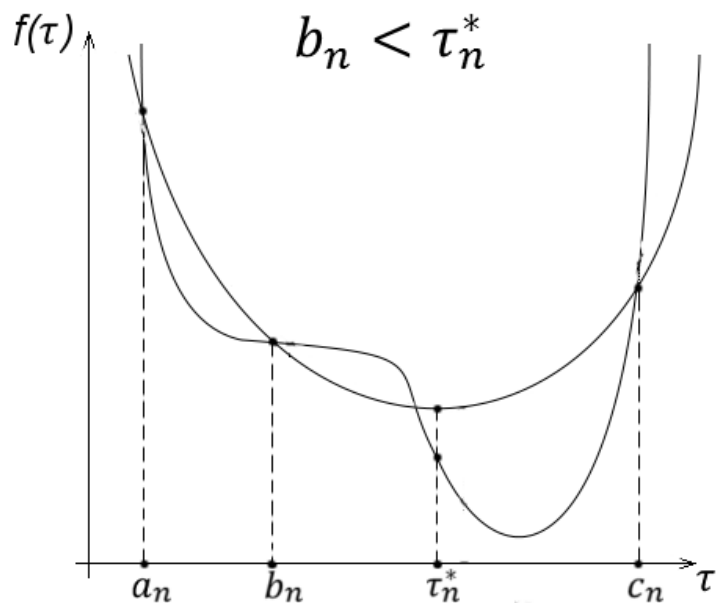
$$\begin{aligned} a &< b < c \\ f(a) &\geq f(b) \\ f(b) &\leq f(c) \end{aligned}$$

$q(\tau)$ – aproksymacja kwadratowa
 τ^* - minimum funkcji $q(\tau)$

$$q(\tau) = \frac{f(a)(\tau - b)(\tau - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)(\tau - a)(\tau - c)}{(b - a)(b - c)} + \frac{f(c)(\tau - a)(\tau - b)}{(c - a)(b - c)}$$

$$\tau^* = \frac{1}{2} \frac{f(a)(b^2 - c^2) + f(b)(c^2 - a^2) + f(c)(a^2 - b^2)}{f(a)(b - c) + f(b)(c - a) + f(c)(a - b)}$$

Metoda aproksymacji kwadratowej



$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := b_n$$

$$b_{n+1} := \tau_n^*$$

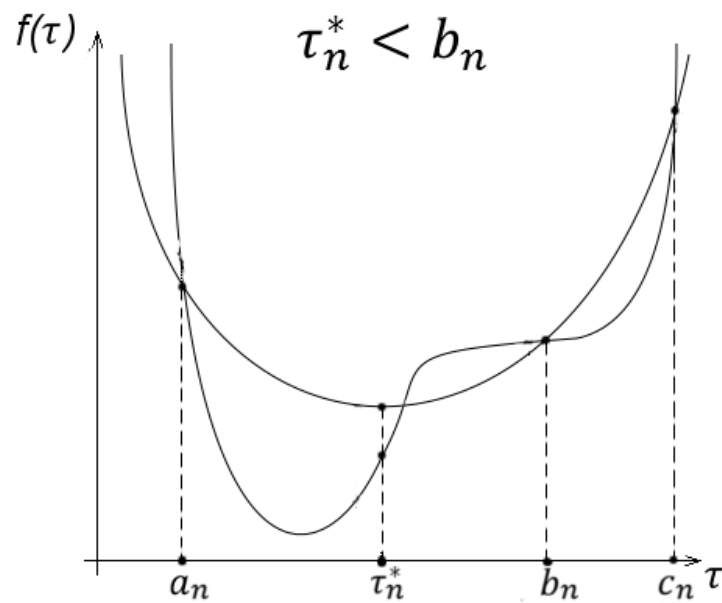
$$c_{n+1} := c_n$$

$$f(b_n) < f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := b_n$$

$$c_{n+1} := \tau_n^*$$



$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

$$a_{n+1} := a_n$$

$$b_{n+1} := \tau_n^*$$

$$c_{n+1} := b_n$$

$$f(b_n) \geq f(\tau_n^*)$$

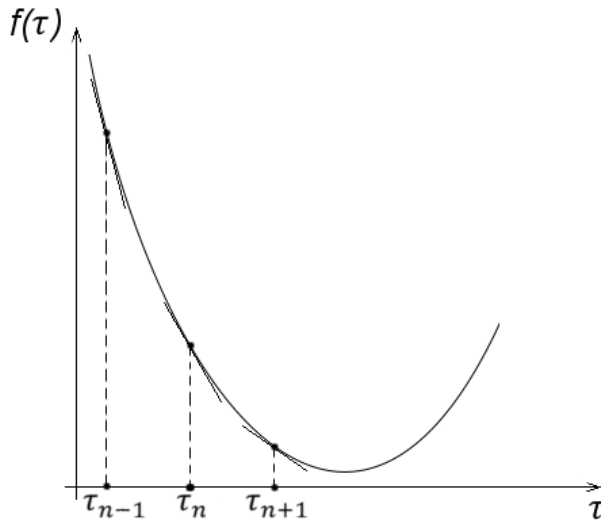
$$a_{n+1} := \tau_n^*$$

$$b_{n+1} := b_n$$

$$c_{n+1} := c_n$$

$$|c_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon \quad \tilde{\tau} = \tau_{n+1}^*$$

Metoda pierwszej pochodnej



$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(\tau_n) \quad \gamma_n > 0, \tau_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$$

$$\text{np. } |\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon \quad (\text{STOP})$$

$$\tau_0$$

$$\tau_1 = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0)$$

$$\tau_2 = \tau_1 - \gamma_1 f'(\tau_1) = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \gamma_n f'(\tau_n) = \dots = \tau_0 - \gamma_0 f'(\tau_0) - \gamma_1 f'(\tau_1) - \dots - \gamma_n f'(\tau_n)$$

$$|\tau_{n+1} - \tau_0| = \left| \sum_{k=0}^n \gamma_k f'(\tau_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n \gamma_k |f'(\tau_k)| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |f'(\tau_k)| \sum_{k=0}^n \gamma_k$$

$$|\tau_{\infty} - \tau_0| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

Metoda znaku pierwszej pochodnej

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \vartheta_n \operatorname{sign}[f'(\tau_n)]$$

$$\gamma_n f'(\tau_n) = \gamma_n |f'(\tau_n)| * \operatorname{sign} f'(\tau_n) = \vartheta_n \operatorname{sign}[f'(\tau_n)], \text{ gdzie } \vartheta_n = \gamma_n |f'(\tau_n)|$$

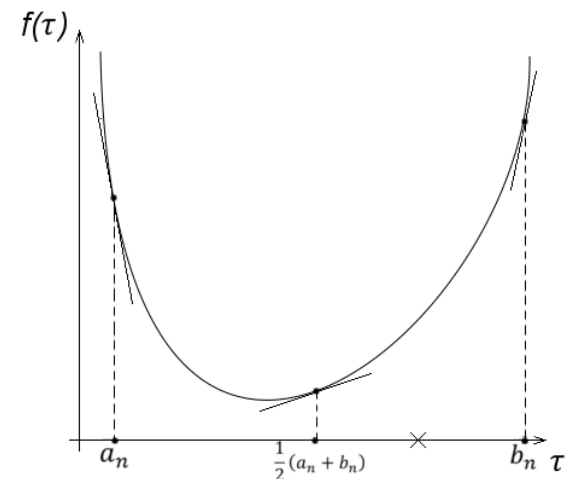
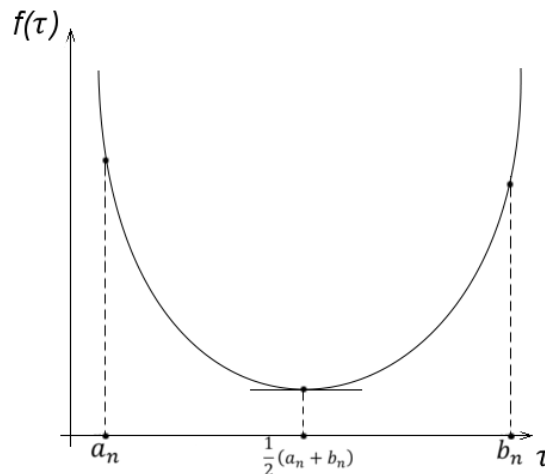
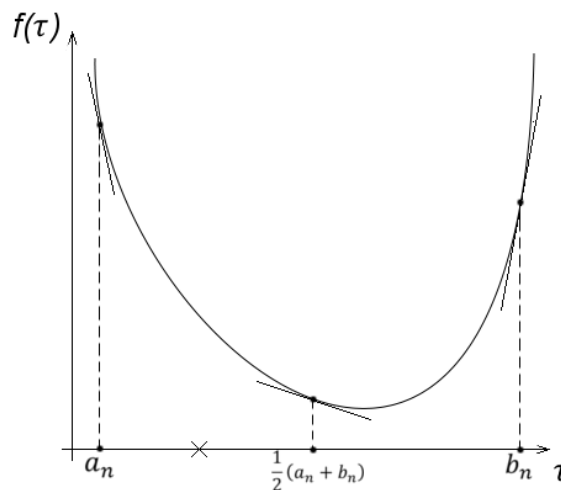
$$\vartheta_n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = 0, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} |f'(\tau_n)| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n |f'(\tau_n)| = 0$$

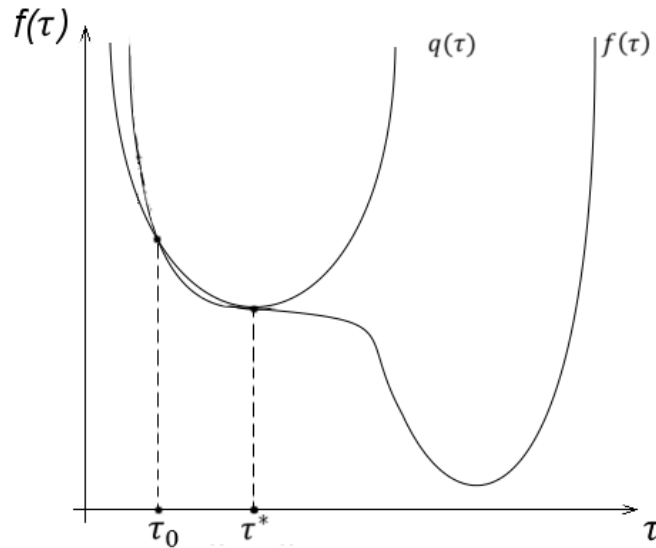
Metoda Bolzano

$$\text{sign } a_n \neq \text{sign } b_n$$



$$\begin{aligned} \text{sign } a_n &= \text{sign}\left(f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right)\right) & f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right) &= 0 & \text{sign } b_n &= \text{sign}\left(f'\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right)\right) \\ a_{n+1} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) & \tilde{\tau} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) & a_{n+1} &:= a_n \\ b_{n+1} &:= b_n & (\text{rzadko}) & & b_{n+1} &:= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{aligned}$$

Metoda drugiej pochodnej



$$\tau_0$$
$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{f'(\tau_n)}{f''(\tau_n)}$$
$$|\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon \text{ (STOP)}$$

$$f(\tau) = \underbrace{f(\tau_0) + (\tau - \tau_0)f'(\tau_0) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)^2 f''(\tau_0)}_{q(\tau)} + o_3(|\tau - \tau_0|)$$

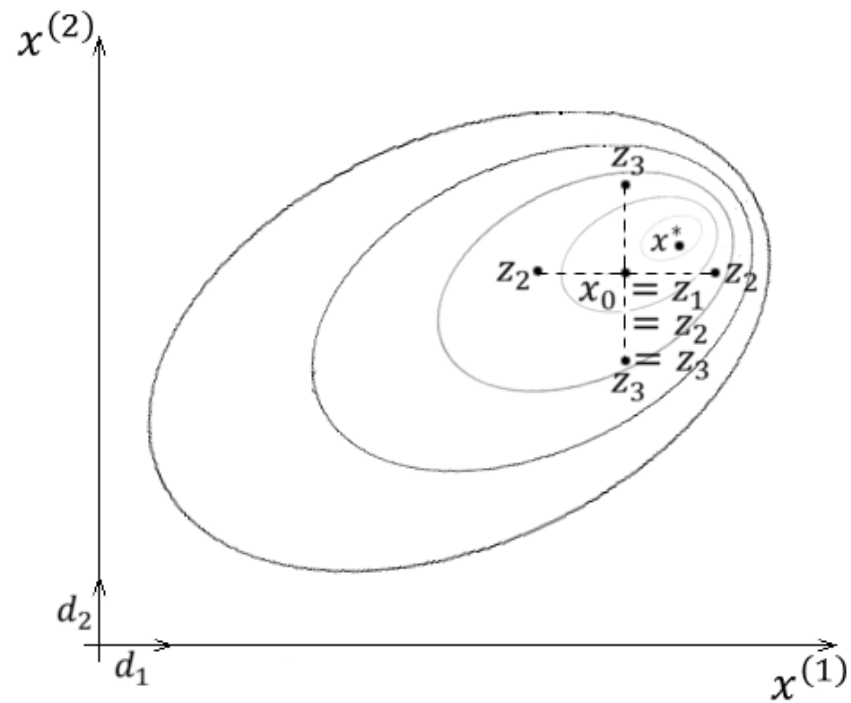
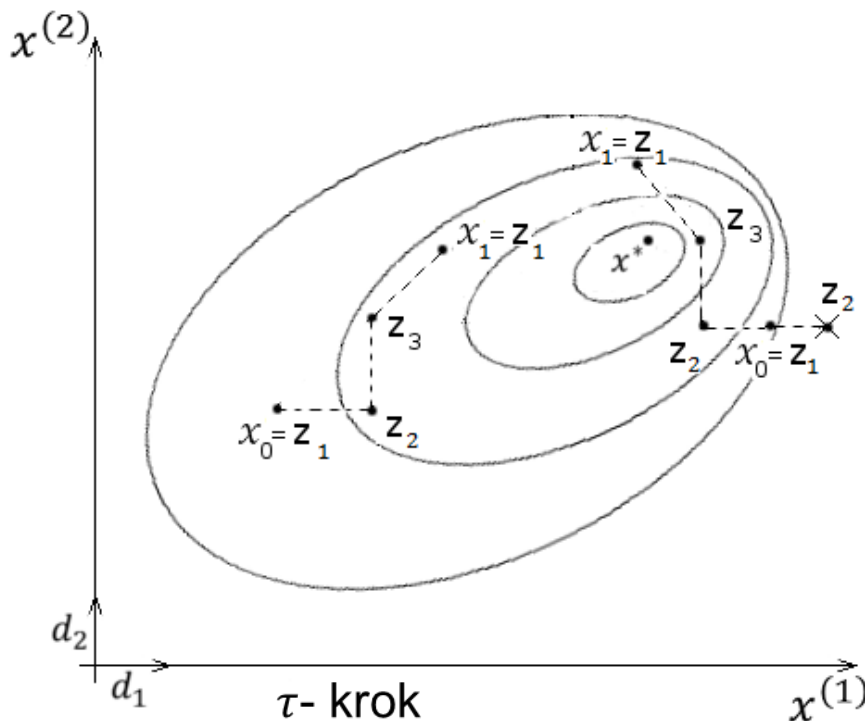
$$q'(\tau) = f'(\tau_0) + (\tau^* - \tau_0)f''(\tau_0) = 0$$

$$\tau^* = \tau_0 - \frac{f'(\tau_0)}{f''(\tau_0)}$$

Bezgradientowe metody optymalizacji

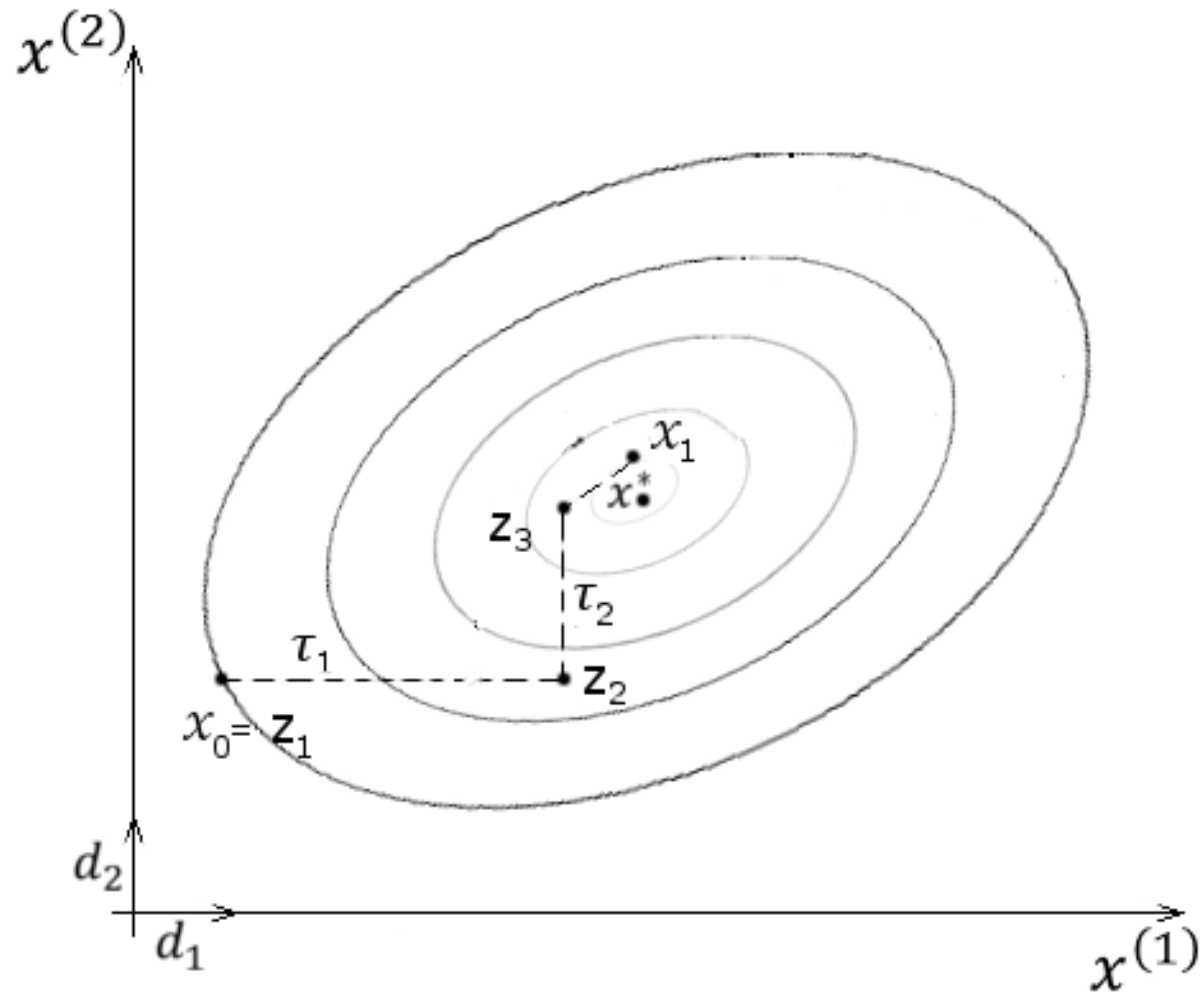
- ⌘ Bezgradientowe metody optymalizacji
 - Hooka-Jeevesa (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
 - Rosenbrocka (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
 - Powella
 - Neldera Meada

Metoda Hooka-Jeevesa – z krokiem dyskretnym

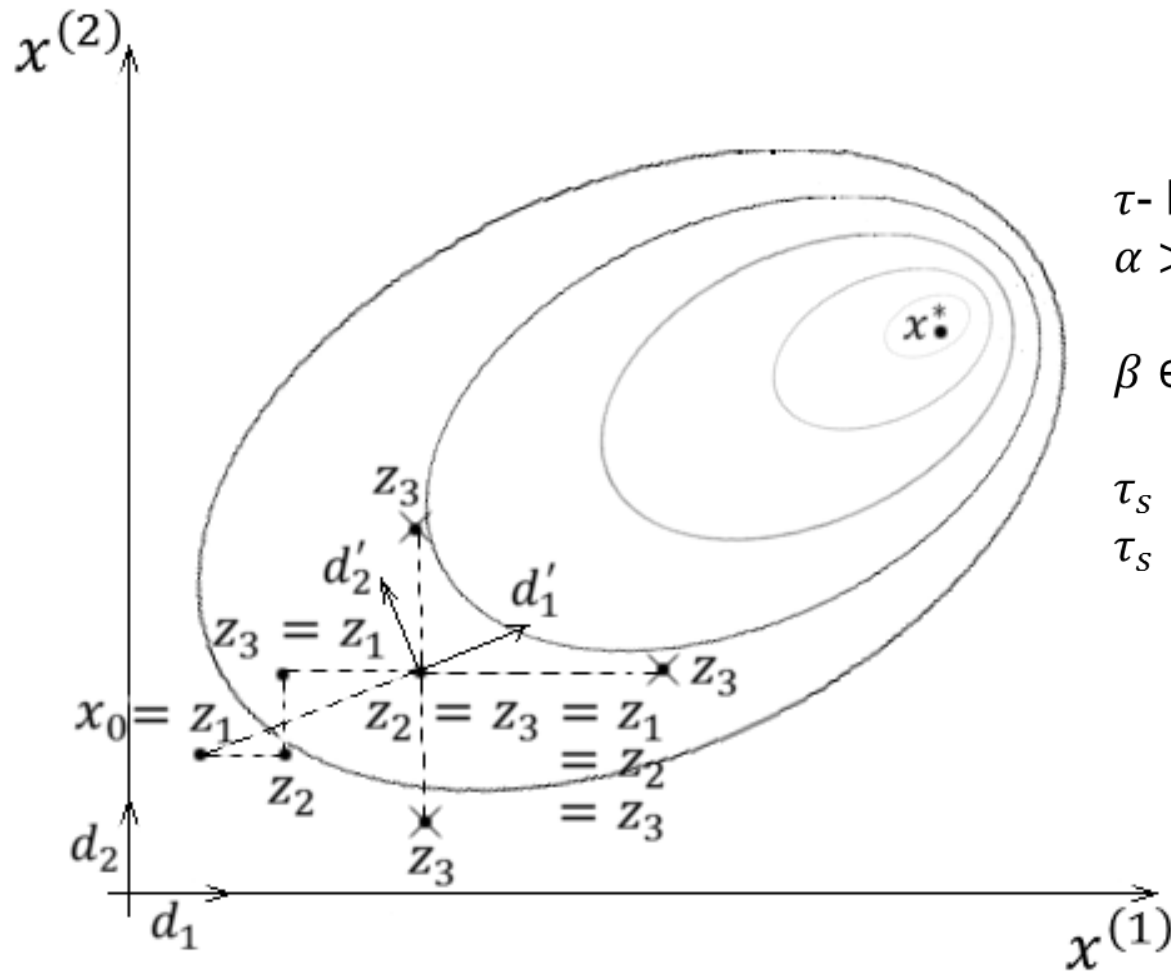


$\alpha > 1$ współczynnik kroku roboczego
 $\beta \in (0,1)$ współczynnika korekcji kroku
 $\tau := \tau\beta$

Metoda Hooka-Jeeveesa – z krokiem optymalnym



Metoda Rozenbrocka – z krokiem dyskretnym



τ - krok

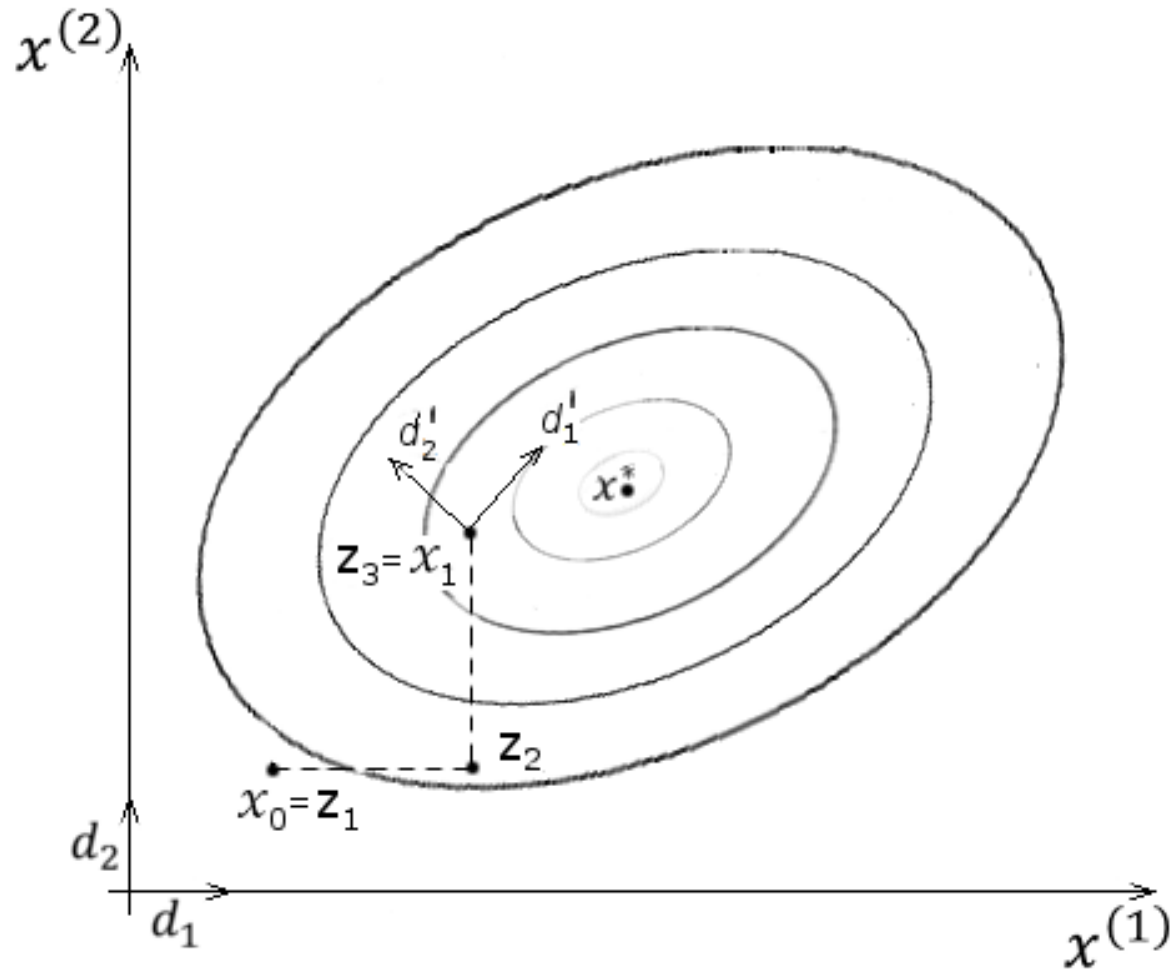
$\alpha > 1$ – współczynnik
korekcji kroku

$\beta \in (-1, 0)$ - współczynnika
korekcji kroku

$$\tau_s := \tau_s \alpha$$

$$\tau_s := \tau_s \beta$$

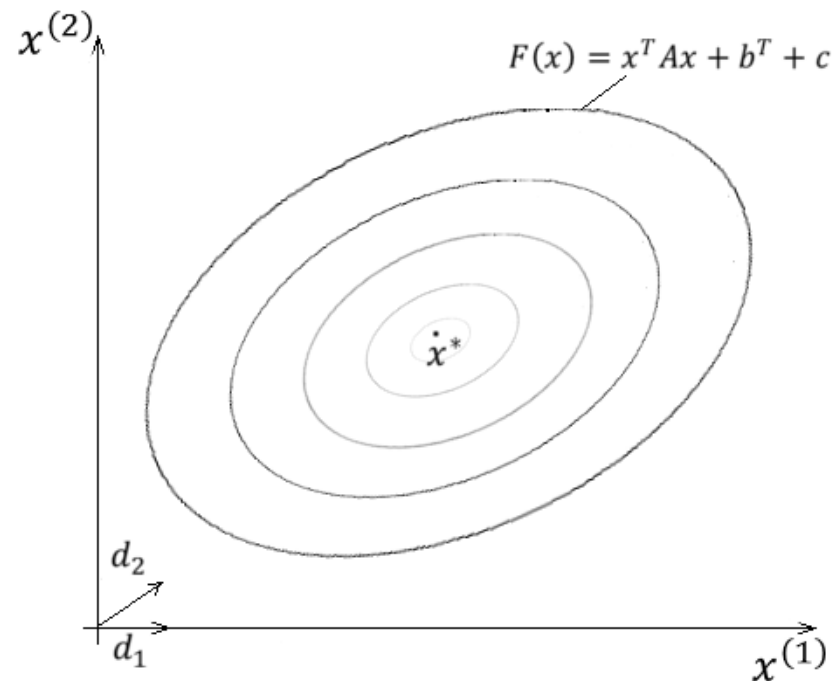
Metoda Rozenbrocka – z krokiem optymalnym



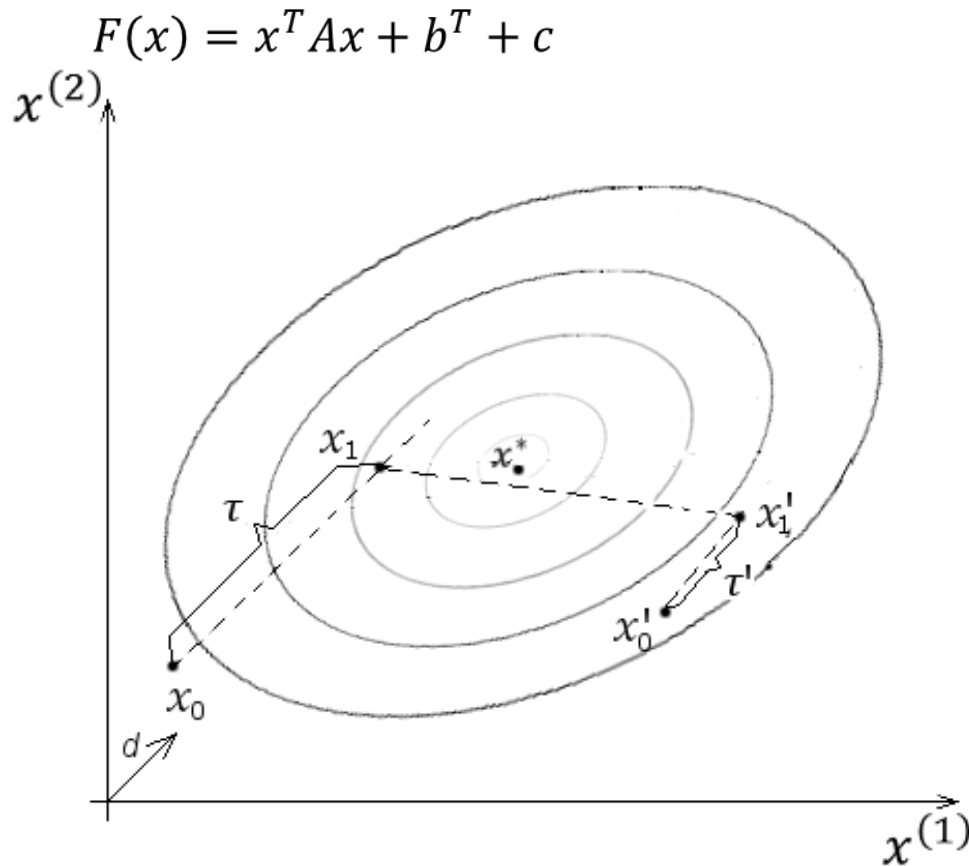
Metoda Powella – wektory sprzężone

$d_1, d_2, \dots, d_s$ - sprzężone według macierzy A , symetrycznej i dodatnio określonej

$$d_i^T A d_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$



Metoda Powella



$$x_1 = x_0 + \tau^* d$$

τ^* - min w kierunku d z x_0

$$x_1' = x_0' + \tau'^* d$$

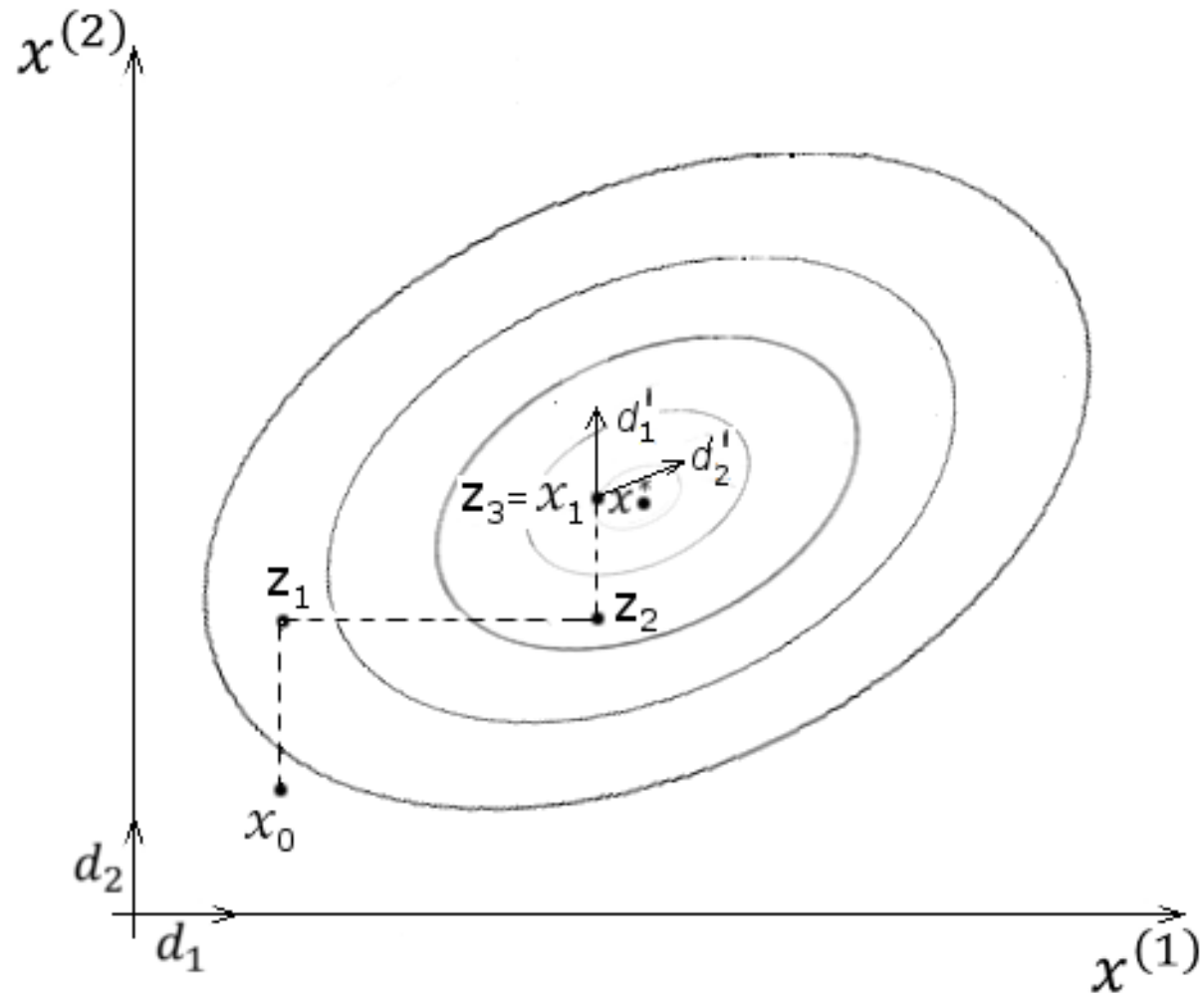
τ'^* - min w kierunku d z x_0'

$$d^T A d' = 0$$

d, d' - sprzężone według A

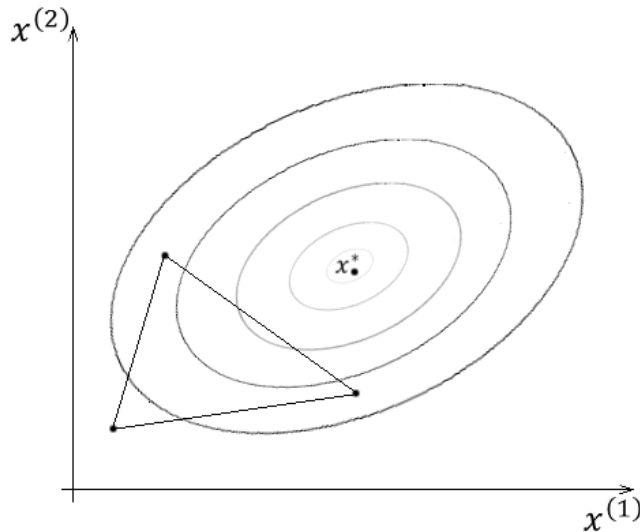
$$d' = \frac{x_1' - x_1}{\|x_1' - x_1\|}$$

Metoda Powell



Metoda Nelder-Meada (simplex)

$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{S+1}$ - simplex w przestrzeni s -wymiarowej



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^{S+1} x_s$$

Generowanie simplexu początkowego

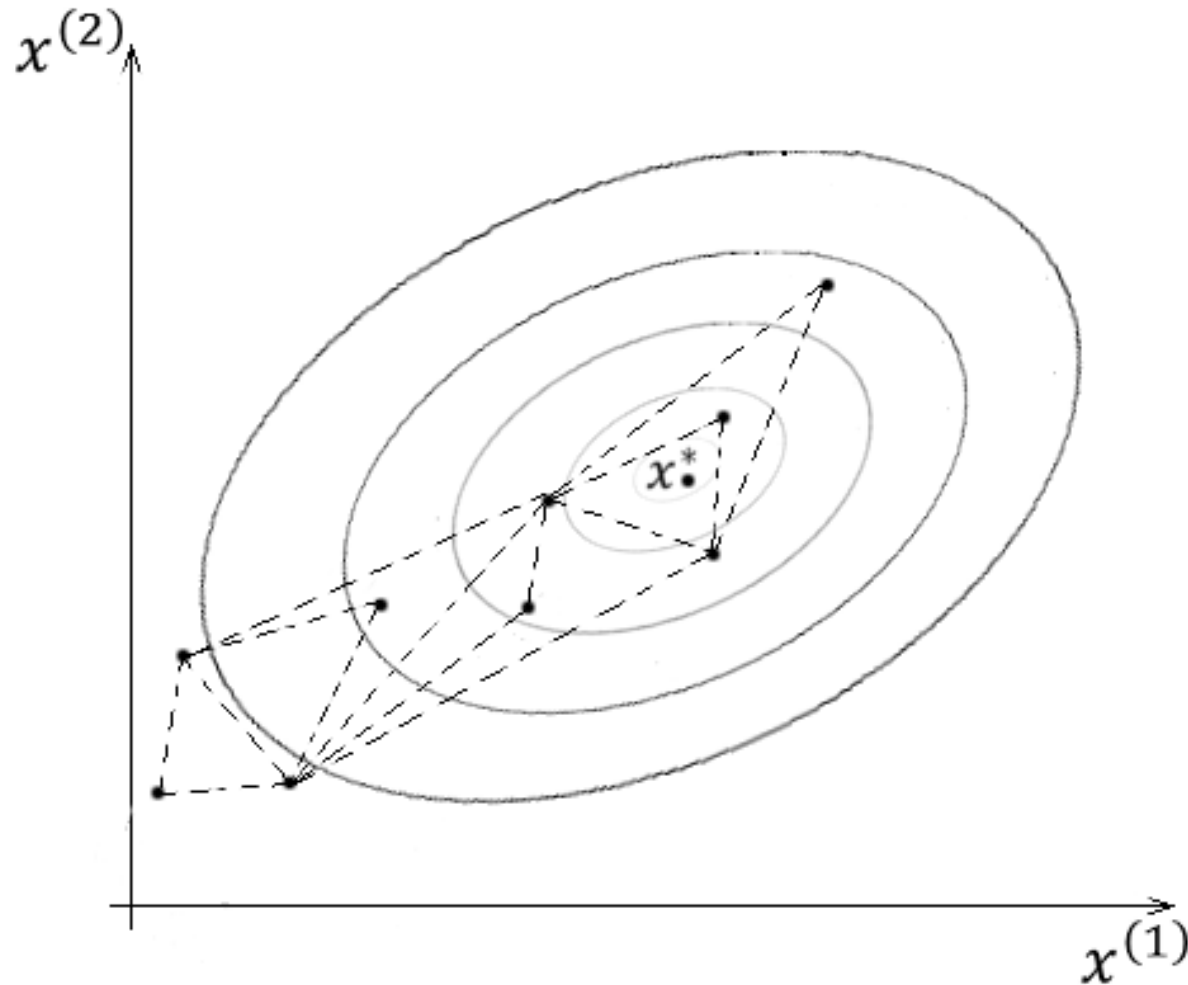
$$x_0, c \quad a = \frac{c}{S\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} + \sqrt{2} - 1)$$

$$b = \frac{c}{S\sqrt{2}} (\sqrt{S+1} - 1)$$

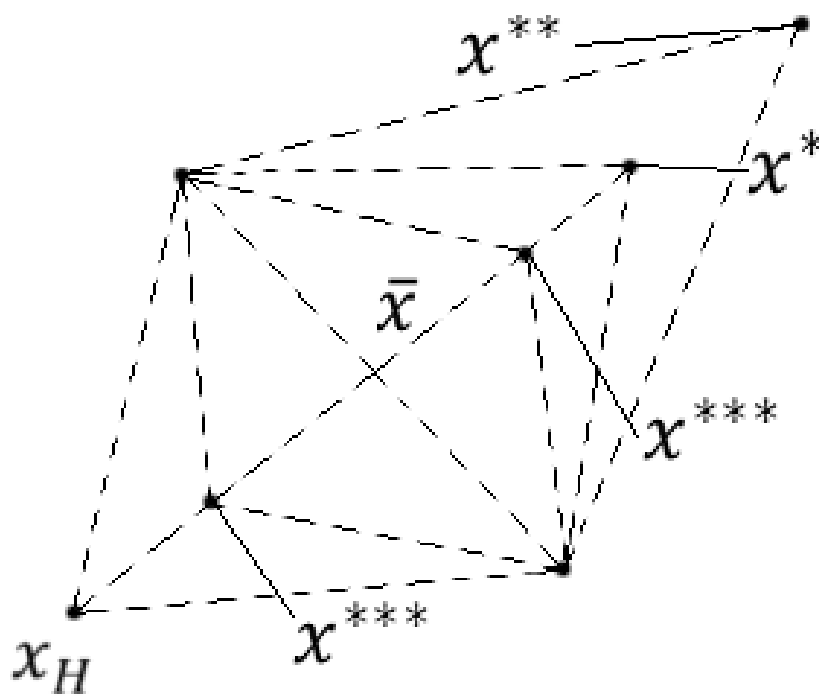
$$d_j = [\quad]$$

$$x_i = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$

Metoda Nelder-Meada (simplex)



Metoda Neldera-Meada



Odbicie

$$x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$$

α – współczynnik odbicia

Jeśli $\alpha > 0$

$$F(x^*) < F(x_L)$$

Ekspansja

$$x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x}) \quad \gamma > 1$$

γ – współczynnik ekspansji

Kontrakcja

Jeśli $F(x^*) > F(x_H)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x_H - \bar{x})$$

Jeśli $F(x^*) > \max_{\substack{1 \leq s \leq S+1 \\ s \neq H}} F(x_s)$

$$x^{***} = \bar{x} + \beta(x^* - \bar{x}) \quad \beta \in (0, 1)$$

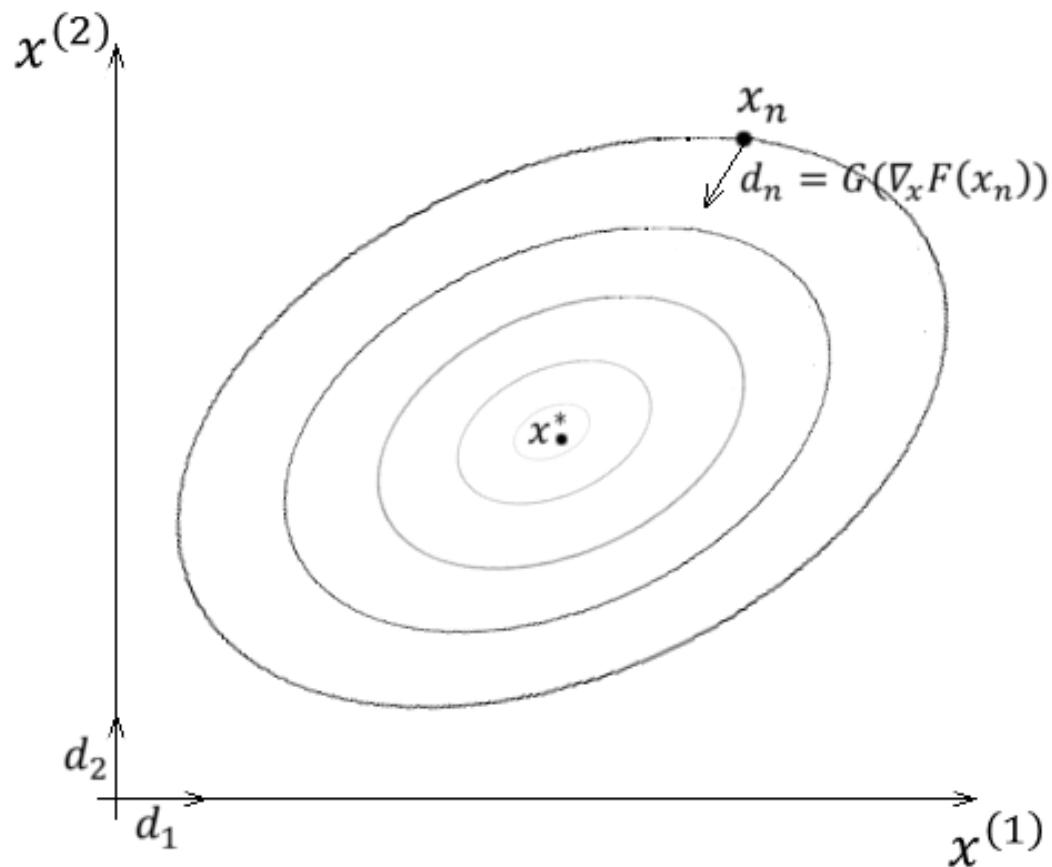
β – współczynnik kontrakcji

Gradientowe metody optymalizacji

∞ Gradientowe metody optymalizacji

- Gradientu prostego
- Najszybszego spadku
- Newtona
- Gradientu sprzężonego
- Zmiennej metryki

Metody gradientowe



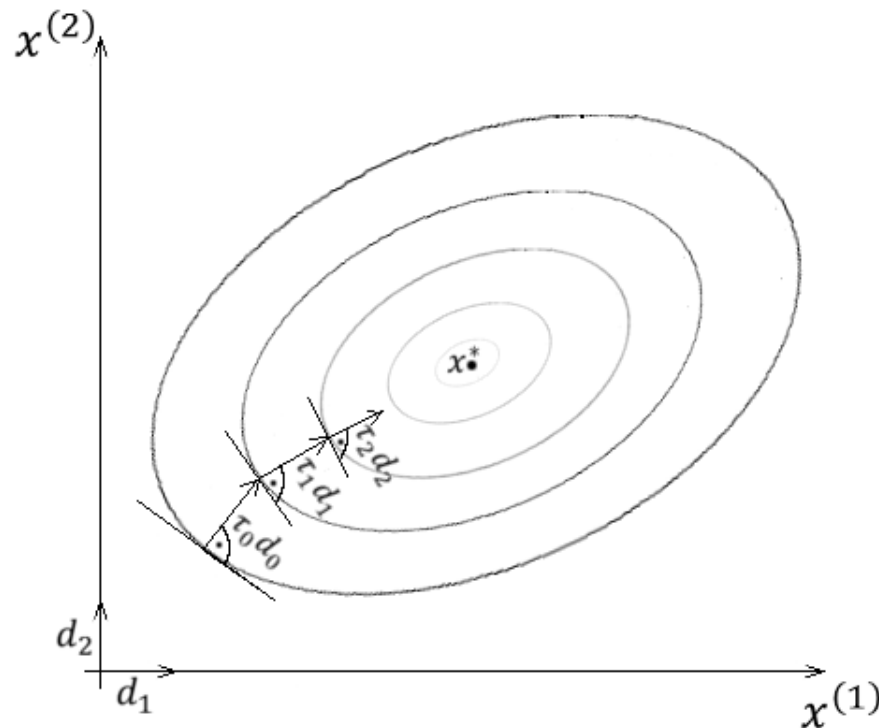
$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$
$$d_n = G(\nabla_x F(x_n))$$

τ_n - krok procedury

Metoda gradientu prostego

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$

$$d_n = -\nabla_x F(x_n); \tau_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau, \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty$$

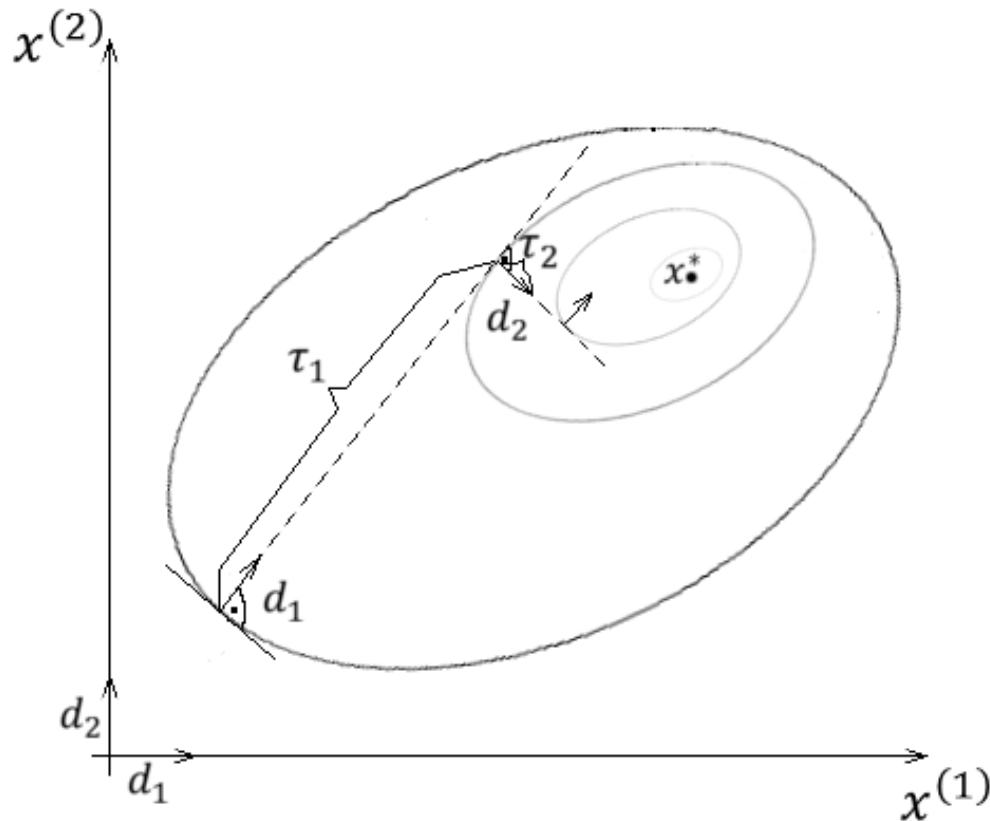


$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\tau_n d_n\| < \varepsilon$$

Metoda najszybszego spadku

$$x_{n+1} = x_n + \tau_n d_n$$

$d_n = -\nabla_x F(x_n)$, τ_n - minimum w kierunku d_n



$$\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$$

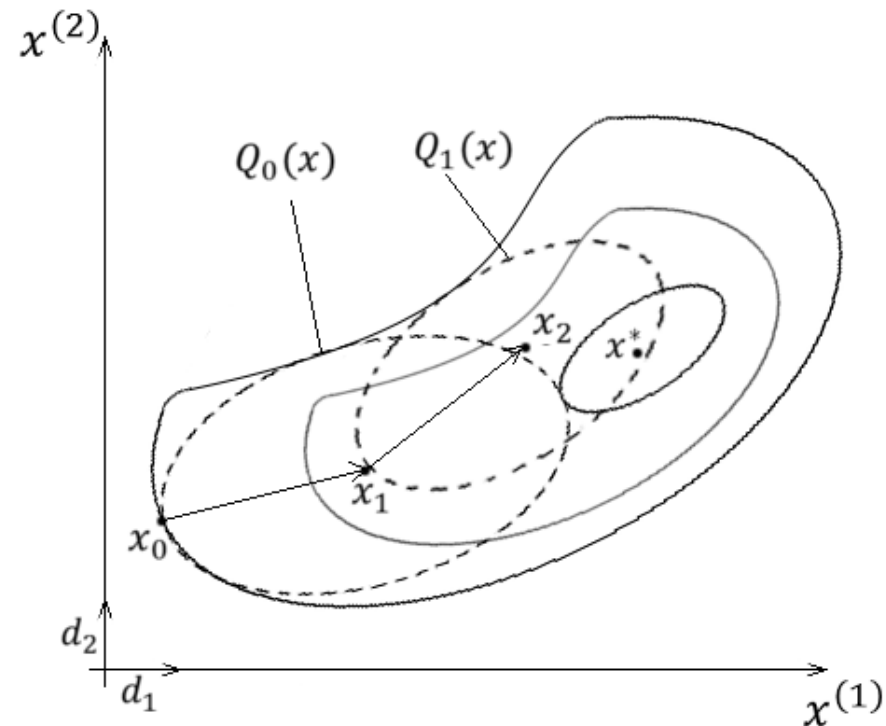
Metoda Newtona

$$F(x) = \underbrace{F(x_0) + (x - x_0)^T \nabla_x F(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H(x_0) (x - x_0)}_{Q(x)} + o_3(\|x - x_0\|)$$

$$\nabla_x Q(x) = \nabla_x F(x_0) + H(x_0)(x^* - x_0) = 0_S$$

$$x^* = x_0 - H^{-1}(x_0) \nabla_x F(x_0)$$

$$x_{n+1} = x_n - H^{-1}(x_n) \nabla_x F(x_n)$$



Metoda Fletchera-Reevesa (gradientu sprzężonego)

Krok 0: $z_1 = x_0$, $s = 1$, $d_1 := -\nabla_x F(z_1)$

Krok 1: $z_{s+1} := z_s + \tau_s d_s$

$\tau_s \rightarrow$ minimum w kierunku d_s

Jeśli $\|\tau_s d_s\| < \varepsilon$ (STOP)

w przeciwnym razie idź do kroku 2

Krok 2: $d_{s+1} := -\nabla_x F(z_{s+1}) + \frac{\|\nabla_x F(z_{s+1})\|}{\|\nabla_x F(z_s)\|} d_s$

$s := s + 1$, idź do kroku 1

$d_1, d_2, \dots, d_s$ - kierunki sprzężone dla formy kwadratowej

Metoda zmiennej metryki

Krok 0: $z_1 = x_0$, $d_1 = -D_1 \nabla_x F(z_1)$, $D_1 = I$, $s=1$

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s$ gdzie τ_s - minimum w kierunku d_s

Jeśli $\|\tau_s d_s\| < \varepsilon$ (STOP)

w przeciwnym razie idź do kroku 2.

Krok 2: $d_{s+1} = -D_{s+1} \nabla_x F(z_{s+1})$

$D_{s+1} = D_s + \frac{p_s p_s^T}{p_s^T q_s} - \frac{D_s q_s q_s^T D_s}{q_s^T D_s q_s}$, gdzie

$p_s = \tau_s d_s$, $q_s = \nabla_x F(z_{s+1}) - \nabla_x F(z_s)$

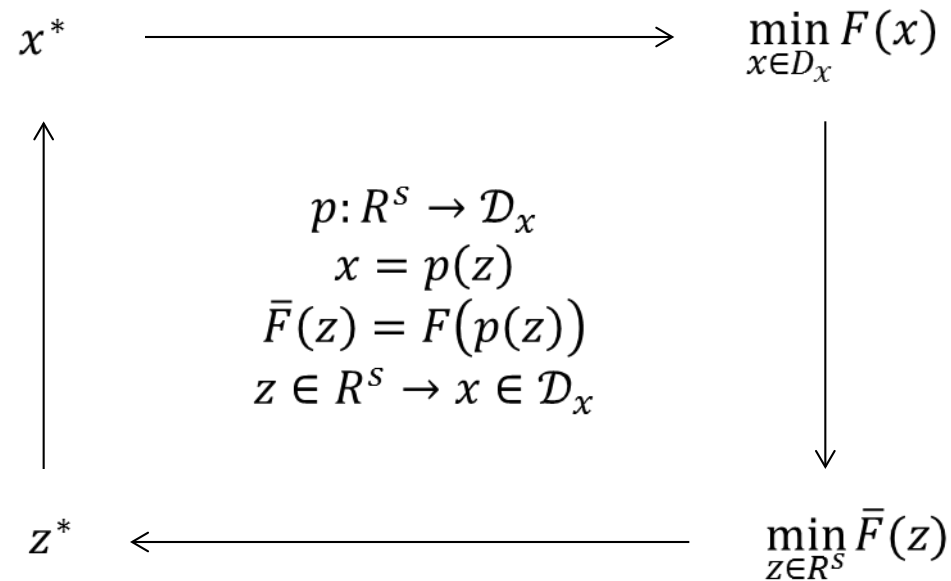
$s := s+1$ idź do kroku 1.

$D_{s+1} \approx H^{-1}(x_{s+1})$

Metody optymalizacji z ograniczeniami

- ✂ Metody optymalizacji z ograniczeniami
 - Transformacji zmiennych
 - Funkcji kary
 - Kary zewnętrznej (kary)
 - Kary wewnętrzne (bariery)
 - Metoda kompleks
 - Poszukiwania losowe

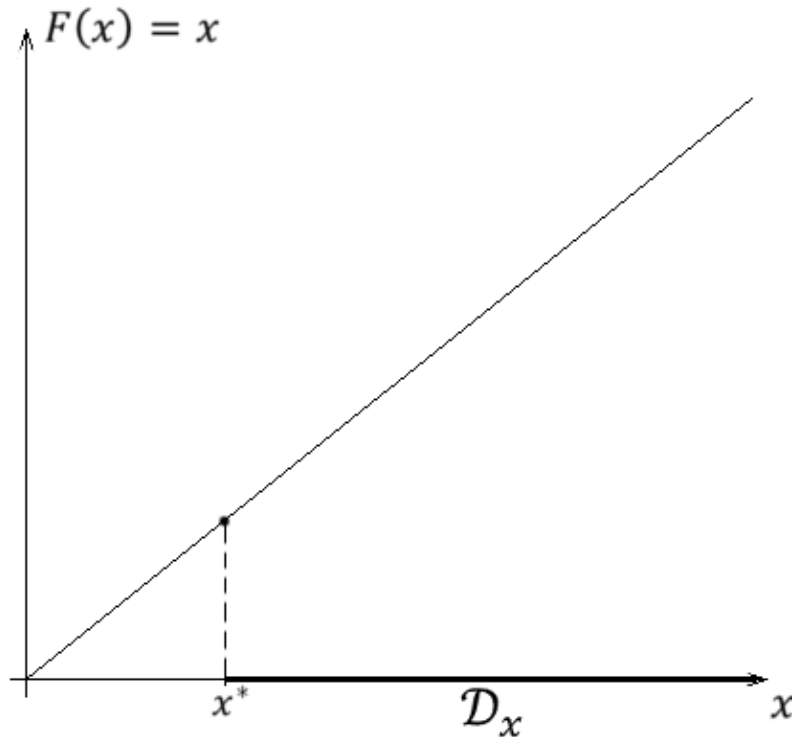
Metoda transformacji zmiennych



Przykład

$$F(x) = x$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid x \geq 1\}$$



$$x^* \rightarrow \min_{x \geq 1} x$$

$$x = z^2 + 1 = p(z)$$

$$z \in \mathbb{R} \rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\bar{F}(z) = z^2 + 1$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} \bar{F}(z)$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} (z^2 + 1)$$

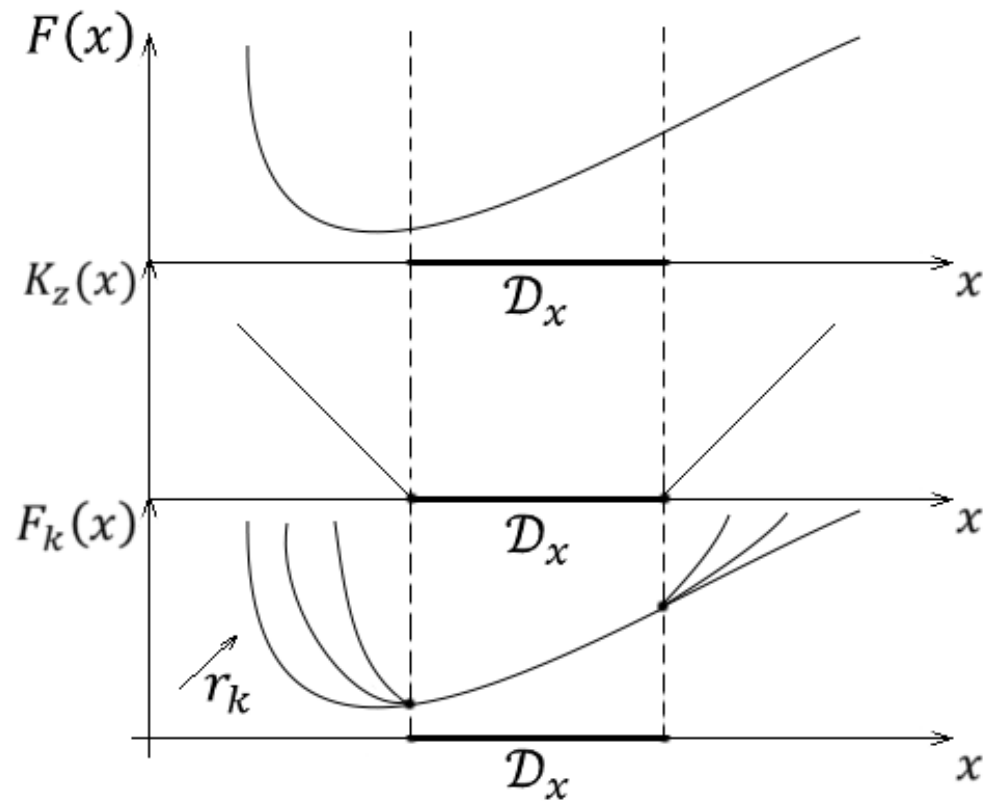
$$(z^2 + 1)' = 2z = 0$$

$$z^* = 0$$

$$x^* = p(z^*) = (z^*)^2 + 1 = 1$$

Metody funkcji kary

Kary zewnętrzne (kary)



$$r_k > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$$

Przykłady funkcji kary zewnętrznej

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \varphi_l(x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

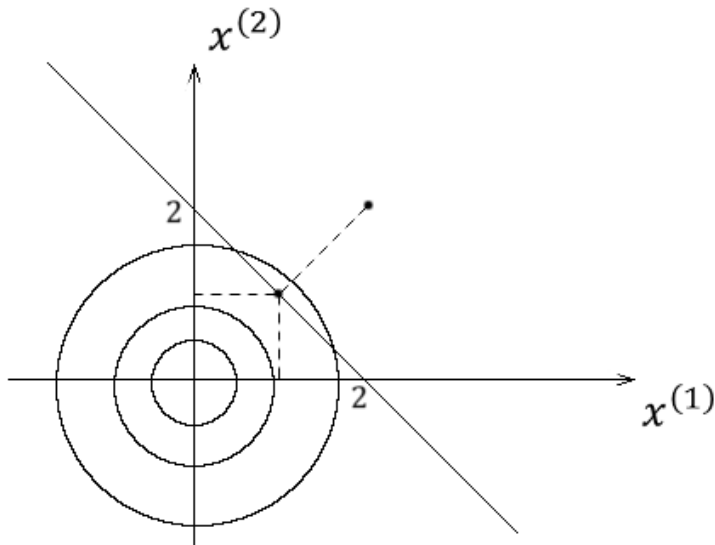
$$\varphi_l(x) \rightarrow K_{lz}(x) = (\varphi_l(x))^2, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) \rightarrow K_{mz}(x) = (\max\{0, \psi_m(x)\})^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_z(x) = \sum_{l=1}^L r_l (\varphi_l(x))^2 + \sum_{m=1}^M \rho_m \max\{0, \varphi_m(x)\}$$

Przykład

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$
$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^2, x^{(1)} + x^{(2)} - 2 = 0\}$$



$$F_k(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2)^2$$

$$F'_k(x) = 0$$

$$2x^{(1)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$2x^{(2)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

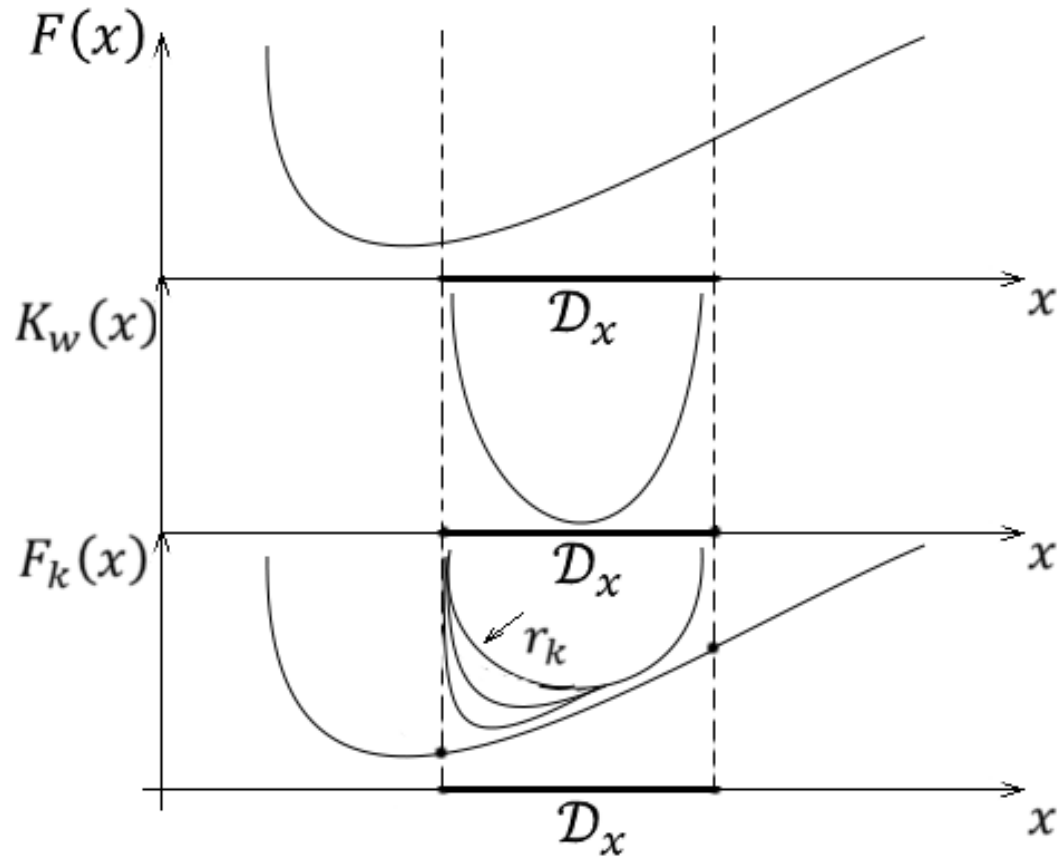
$$x^{(1)} = x^{(2)}$$

$$+2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \frac{2r_k}{2r_k + 1}$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \lim_{r_k \rightarrow \infty} \frac{2r_k}{2r_k + 1} = 1, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kary wewnętrzne (bariery)



$$r_k > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$$

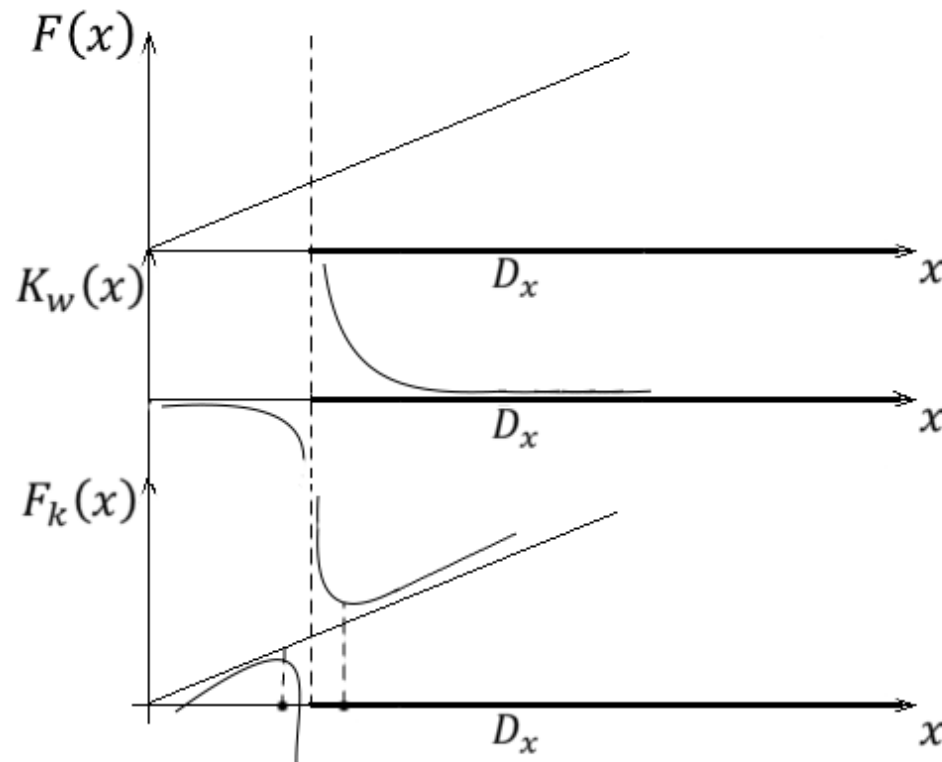
Kara wewnętrzna (metoda Carrola)

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$K_w(x) = \sum_{m=1}^M \frac{-r_m}{\psi_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Przykład

$$F(x) = x; \quad \mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1, x \geq 1\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^1, 1 - x \leq 0\}$$



$$K_w(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$$F_k(x) = x + r_k \frac{1}{x-1}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{-r_k}{(x-1)^2} = 0$$

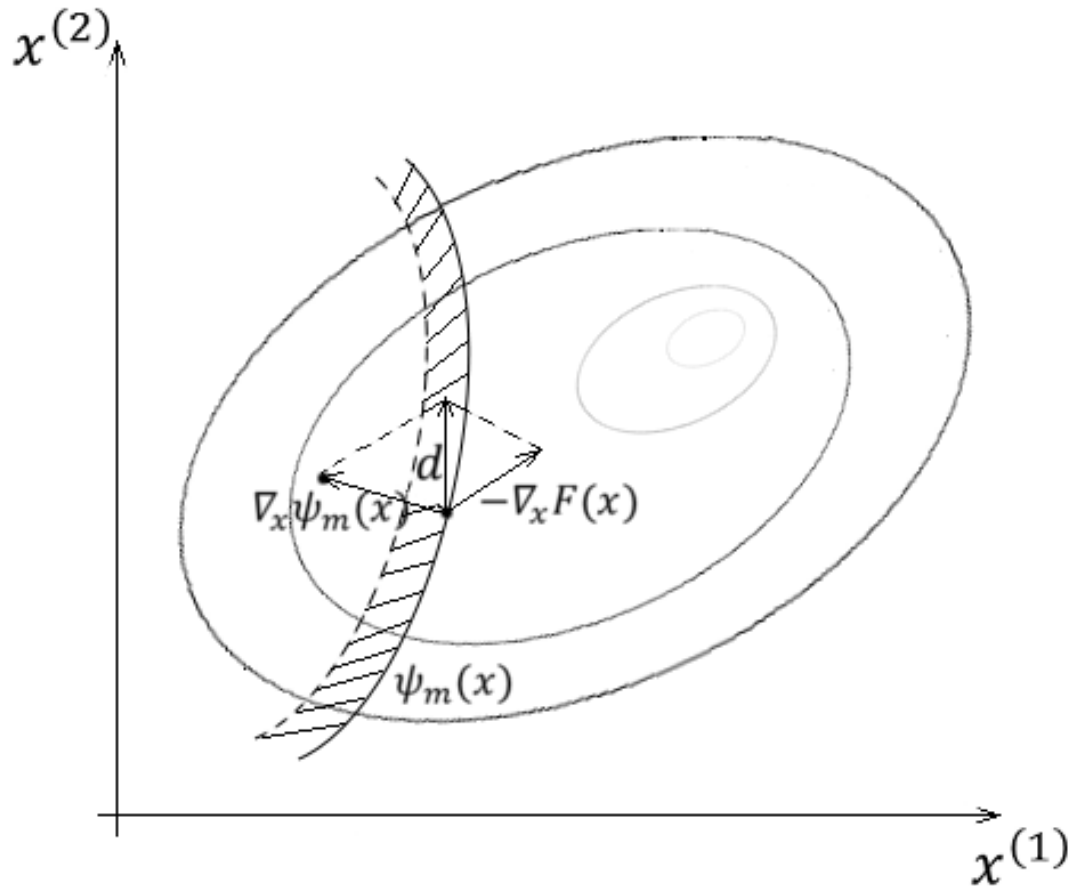
$$x_k = 1 \pm \sqrt{r_k}$$

$$x_k = 1 - \sqrt{r_k} \notin \mathcal{D}_x$$

$$x_k = 1 + \sqrt{r_k} \in \mathcal{D}_x$$

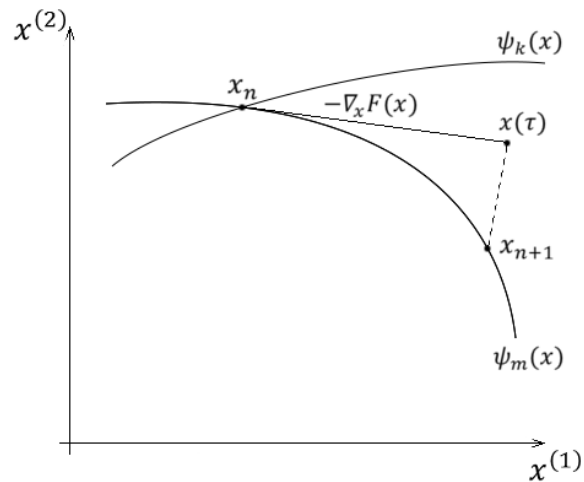
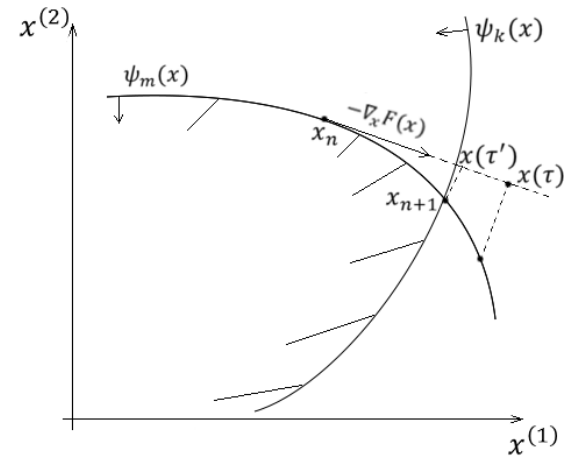
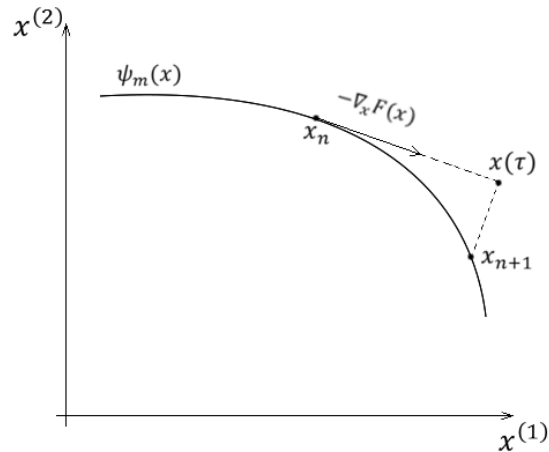
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

Metoda modyfikacji kierunków



$$d = \frac{\nabla_x \psi_m(x)}{\|\nabla_x \psi_m(x)\|} - \frac{\nabla_x F(x)}{\|\nabla_x F(x)\|}$$
$$x: \psi(x) - \delta \leq 0$$

Metoda rzutowania - Rozena

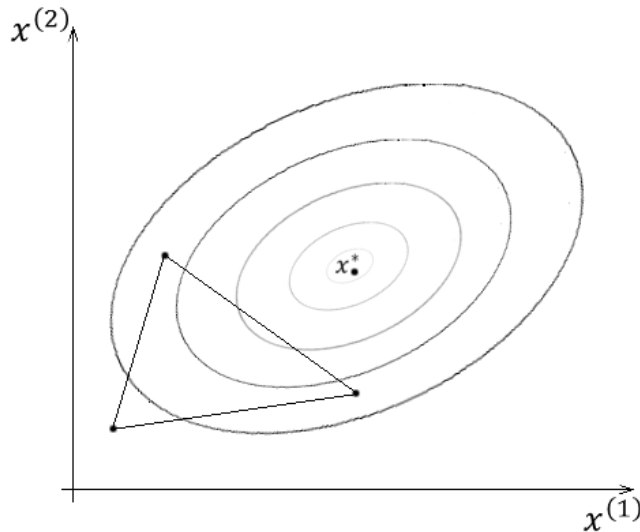


Metoda Komplexs (Boxa)

Metoda Nelder-Meada

(simplex)

$x_1 \ x_2 \ \dots \ x_K$ - kompleks w przestrzeni s -wymiarowej $K \geq S + 1$



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq K} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^K x_s$$

$$x^* = (1 + \alpha)\bar{x} - x_H$$

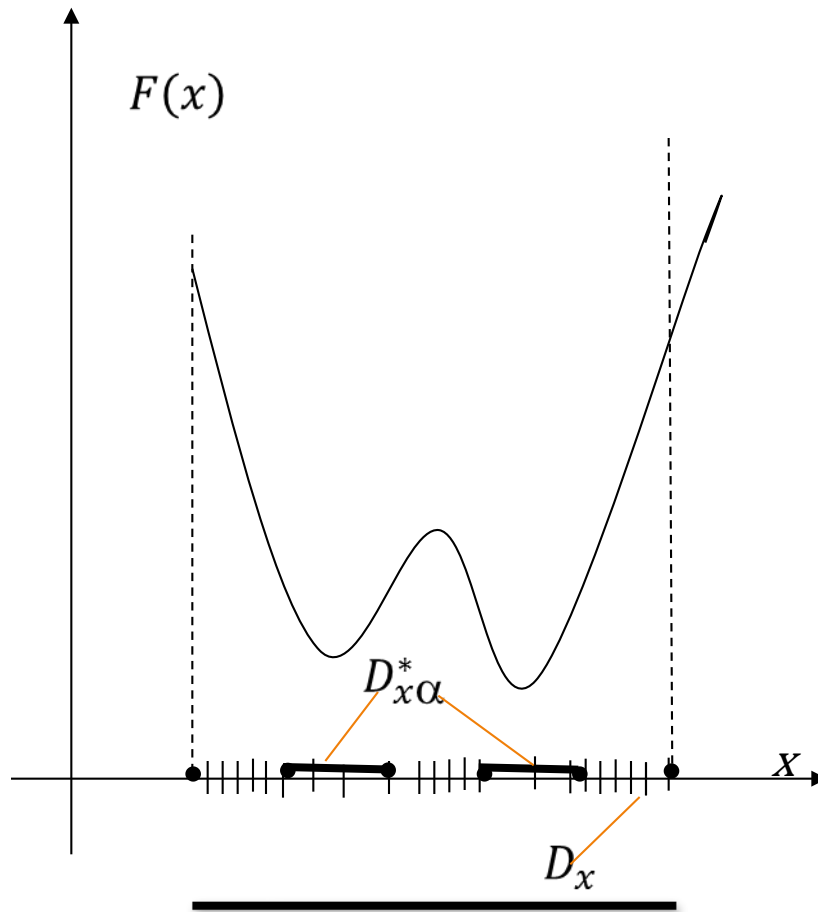
$$D_x: l_s \leq x^{(s)} \leq u_s \quad s = 1, 2, \dots, S$$

$$l_m \leq x_m(x) \leq u_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$x_k = l_k + r_k |u_k - l_k|$, r_k - liczba losowa $\in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, K$

Jeśli x_k nie należy do D_x to przesun punkt w kierunku centroidu punktów zaakceptowanych

Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$

Zadanie programowania liniowego

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \varphi_l(x) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \psi_m(x) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M\}$$

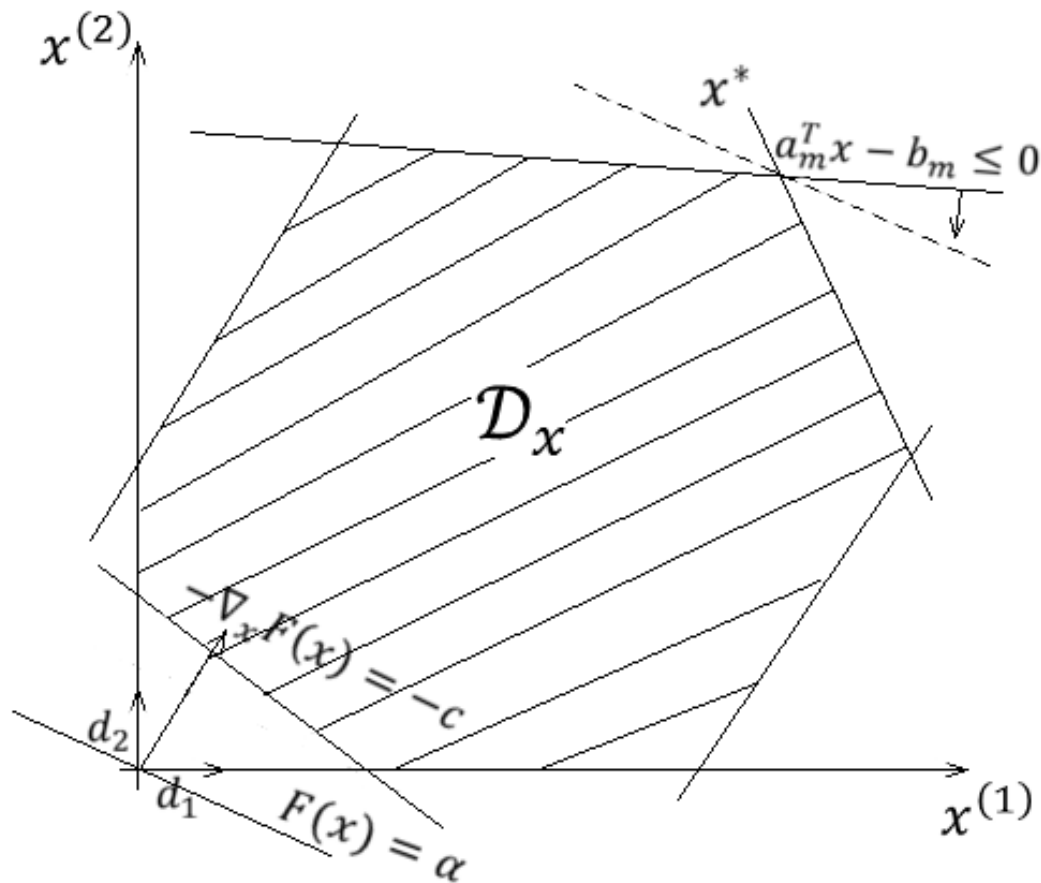
$$F(x) = c^T x = \sum_{s=1}^S c_s x^{(s)}$$

$$\varphi_l(x) = a_l^T x - b_l = \sum_{s=1}^S a_{ls} x^{(s)} - b_l = 0 \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) = a_m^T x - b_m \leq 0 = \sum_{s=1}^S a_{ms} x^{(s)} - b_m \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

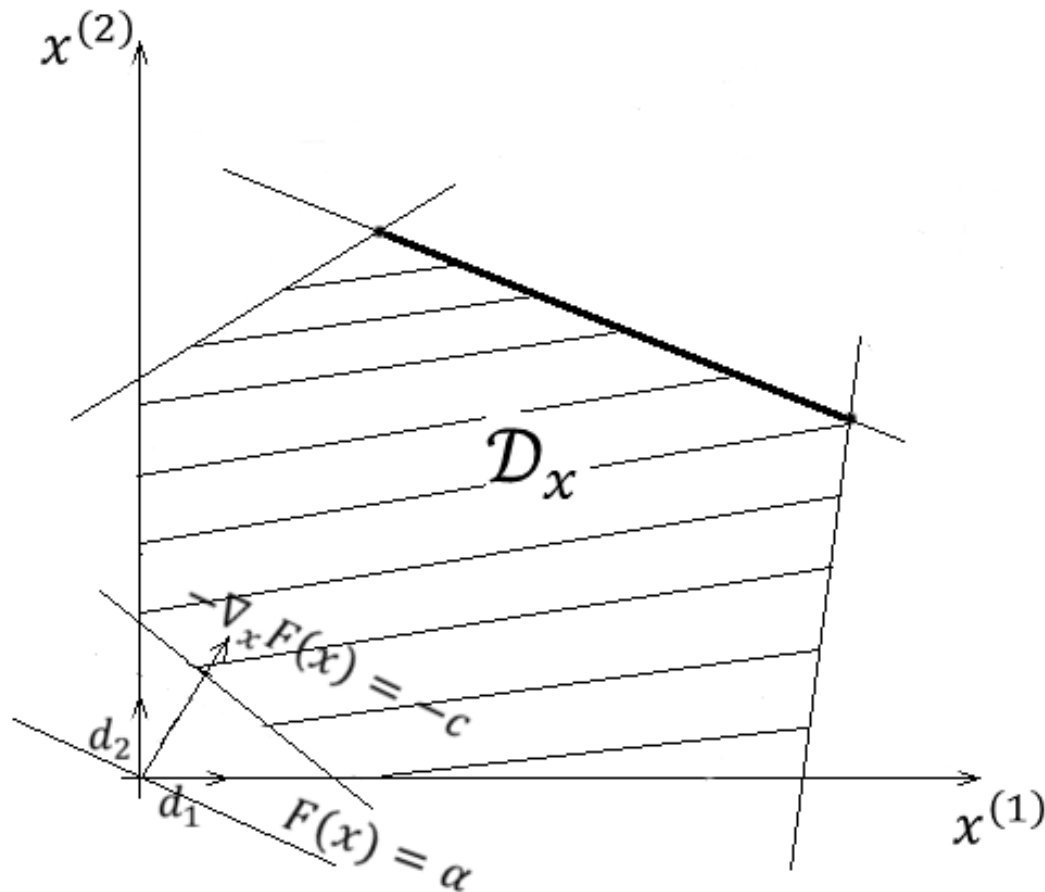
$$x^{(s)} \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, S$$

Interpretacja graficzna



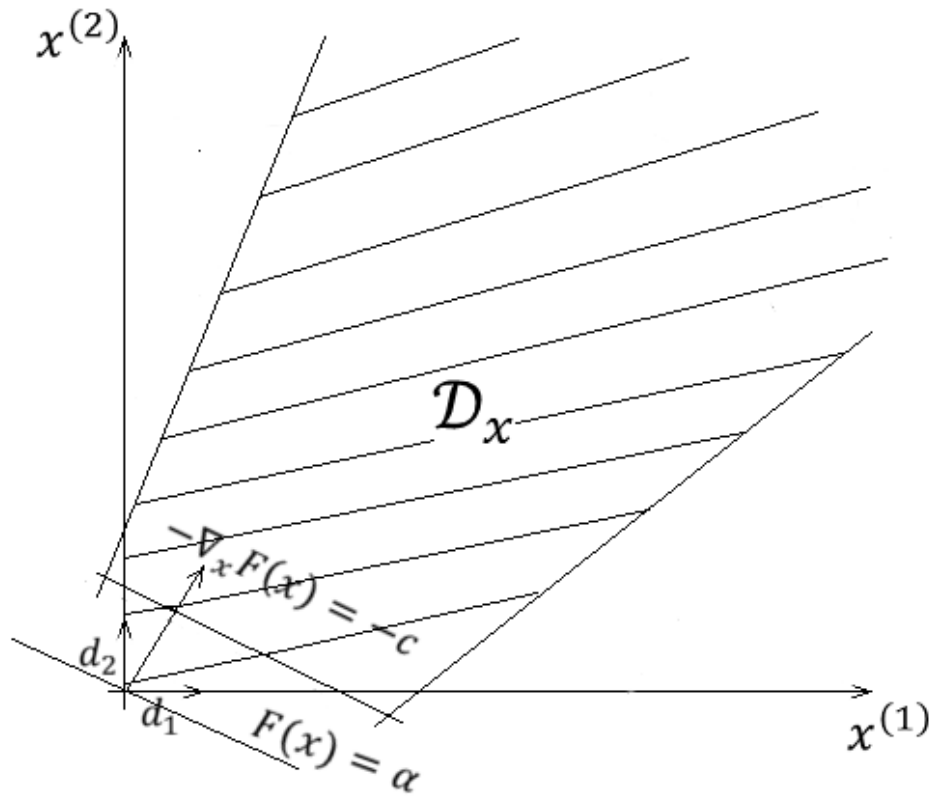
1. Rozwiązanie leży w wierzchołku

Interpretacja graficzna



2. Rozwiązanie leży na odcinku

Interpretacja graficzna



3. Rozwiązanie nieograniczone

Postać kanoniczna

$$F(x) = c^T x$$

$$\text{A: } \mathcal{D}_X = \{x \in R^s, Ax - b = 0_L, x \geq 0_S\}$$

lub

$$\text{B: } \mathcal{D}_x = \{x \in R^s, Ax - b \leq 0_L, x \geq 0_S\}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(S)} \end{bmatrix}, \quad A_{S \times L} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1} & \cdots & a_{LS} \end{bmatrix}$$

Metoda simplex

1. Wyznaczenie rozwiązania początkowego
2. Kryterium zbieżności – zatrzymanie procedury
3. Przechodzenie z jednej bazy do drugiej
4. Postępowanie przy rozwiązaniach zdegenerowanych

Algorytm simplex

1. Wyznaczamy początkową bazę dopuszczalną
2. Badamy czy $c - c_B B^{-1} A \geq 0_S$. Jeżeli tak to x_B - rozwiązanie problem $x = [x_B \ 0]$
3. Wstawiamy do bazy k - takie, że $c_k - z_k = \min_{1 \leq s \leq S} (c_s - z_s)$
4. Badamy, czy $h_k \leq 0$, jeśli tak - funkcja nieograniczona
5. Wyrzucamy z bazy l - takie, że

$$\frac{h_{l0}}{h_{lk}} = \min_{1 \leq s \leq S} \left\{ \frac{h_{s0}}{h_{sk}}, h_{sk} > 0 \right\}$$

6. $I_B := I_B \setminus \{l\} \cup \{k\}$
 $I_B = \{j \in \{1, 2, \dots, S\} \mid x^{(j)} \text{ jest elementem bazy} \}$
7. Jeżeli wskaźnik optymalności zmiennej nie bazowej jest równy 0 to istnieje kolejne rozwiązanie (rozwiązania alternatywne)

Algorytm simplex

			c_1	$\dots$	c_k	$\dots$	c_S			
Zmienn e bazowe	c_B	h_0	h_1	$\dots$	h_k	$\dots$	h_S		$\frac{h_{s0}}{h_{sk}}$	$h_{sk} \geq 0$
x_{j1}	c_{j1}	h_{10}	h_{11}	$\dots$	h_{1k}	$\dots$	h_{1S}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jl}	c_{jl}	h_{l0}	h_{l1}	$\dots$	h_{lk}	$\dots$	h_{lS}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jL}	c_{jL}	h_{L0}	h_{L1}	$\dots$	h_{Lk}	$\dots$	h_{LS}			
			$c_1 - z_1$	$\dots$	$c_k - z_k$	$\dots$	$c_S - z_S$			

$$z_k = \sum_{s \in I_B} c_s h_{sk}$$

$$h'_{ls} := \frac{h_{ls}}{h_{lk}}; \quad h'_{is} = h_{is} - \frac{h_{ik} h_{ls}}{h_{lk}}$$

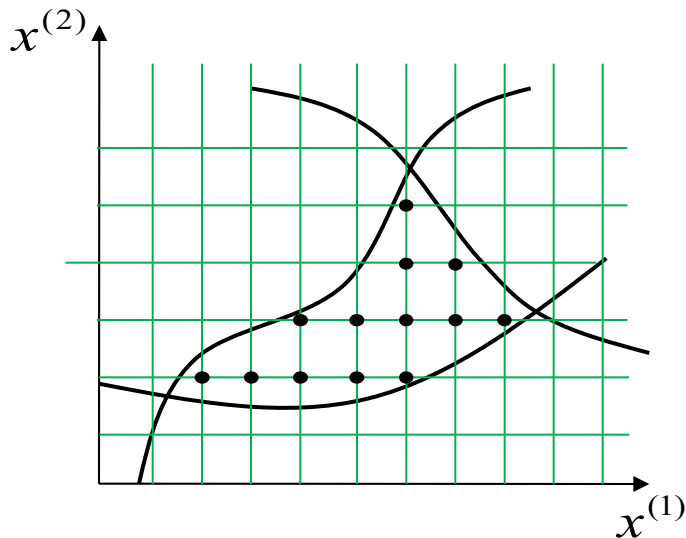
$$s = 1, 2, \dots, S \quad i = 0, 1, \dots, S$$

$$s \in I_B \setminus \{l\}$$

Programowanie całkowitoliczne

Programowanie całkowitoliczne

Zmienne decyzyjne: $x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x \cap \{x^{(s)} \in \mathcal{C}, s = 1, 2, \dots, S\}$



Inne równoważne

$x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ - typoszereg

$x \in \overline{\mathcal{D}}_x = \{x^{(s)} \in \{0, 1\}, s = 1, 2, \dots, S\}$ - programowanie
zero - jedynkowe (Boolowskie)

Programowanie całkowitoliczbowe

Krok 0: $\mathcal{D}_0 = \{\mathcal{D}_{xc} = \mathcal{D}_{01}\}$, $n = 0$, $J_0 = 1$

Krok 1: Wyznaczyć taki zbiór $\mathcal{D}^* \in \mathcal{D}_n$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^*) = \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(\mathcal{D})$$

Krok 2: Badamy czy $\mathcal{D}^*$ jest zbiorem jednoelementowym ($\{x^*\} = \mathcal{D}^*$)

lub $x^* \sim \mathcal{F}(\mathcal{D}^*)$ tj. $\mathcal{F}(\mathcal{D}^*) = F(x^*)$ $x^* \in \mathcal{D}^*$ (oszacowanie jest całkowitoliczbowe) to x^* jest rozwiązaniem optymalnym STOP

Krok 3: $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{nk}$ dzielimy na M zbiorów rozłącznych

$$\mathcal{D}_{1nk} \mathcal{D}_{2nk} \dots \mathcal{D}_{Mnk} \quad \mathcal{D}_{nk} = \bigcup_{m=1}^M \mathcal{D}_{mnk}$$

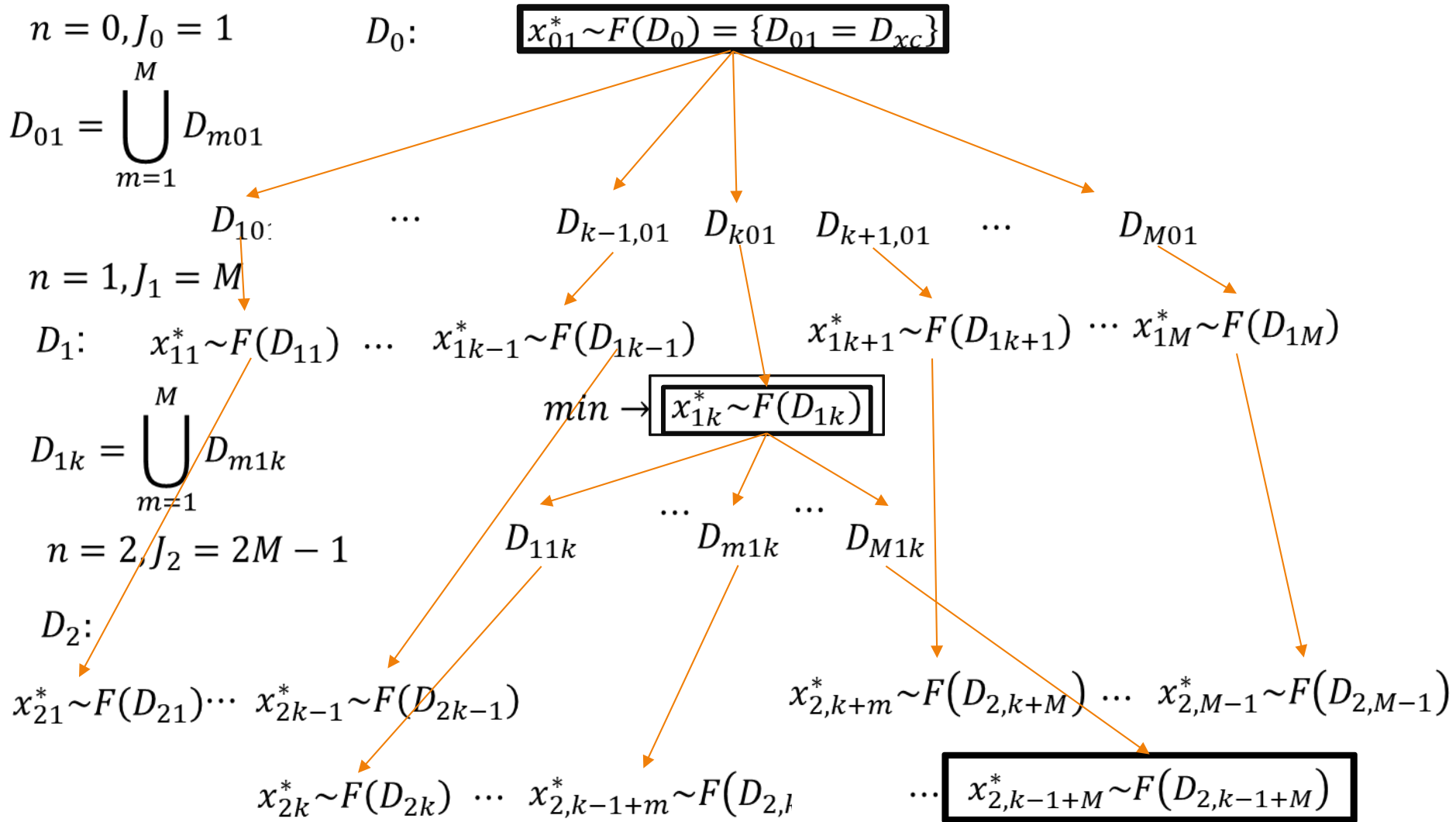
Krok 4: $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{nk}$

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n \cup \{\mathcal{D}_{1nk}, \mathcal{D}_{2nk}, \dots, \mathcal{D}_{Mnk}\} \setminus \mathcal{D}_{nk}$$

$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{nj} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{mnk} \quad j = k-1+m, m = 1, 2, \dots, M$$

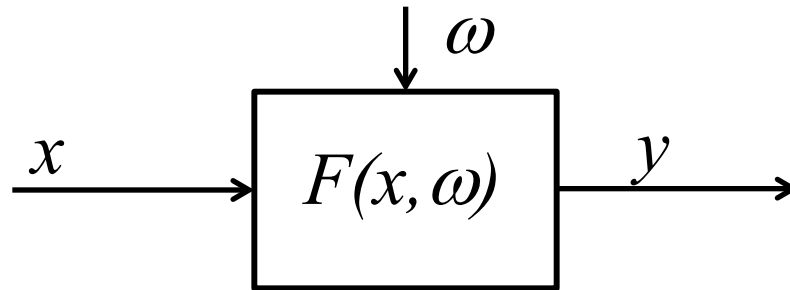
$$\mathcal{D}_{n+1,j} = \mathcal{D}_{ni} \quad j = k+M+i, i = k+1, \dots, J_n, J_{n+1} = J_n + M - 1$$



Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

- ⌘ Niepewność opisana zmienną losową
- ⌘ Gra z naturą
- ⌘ Podejście growe

Niepewność opisana zmienną



$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})]$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = 0, l = 1, \dots, L, E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

a_i - minimalna korzyść dla i – tego wiersza

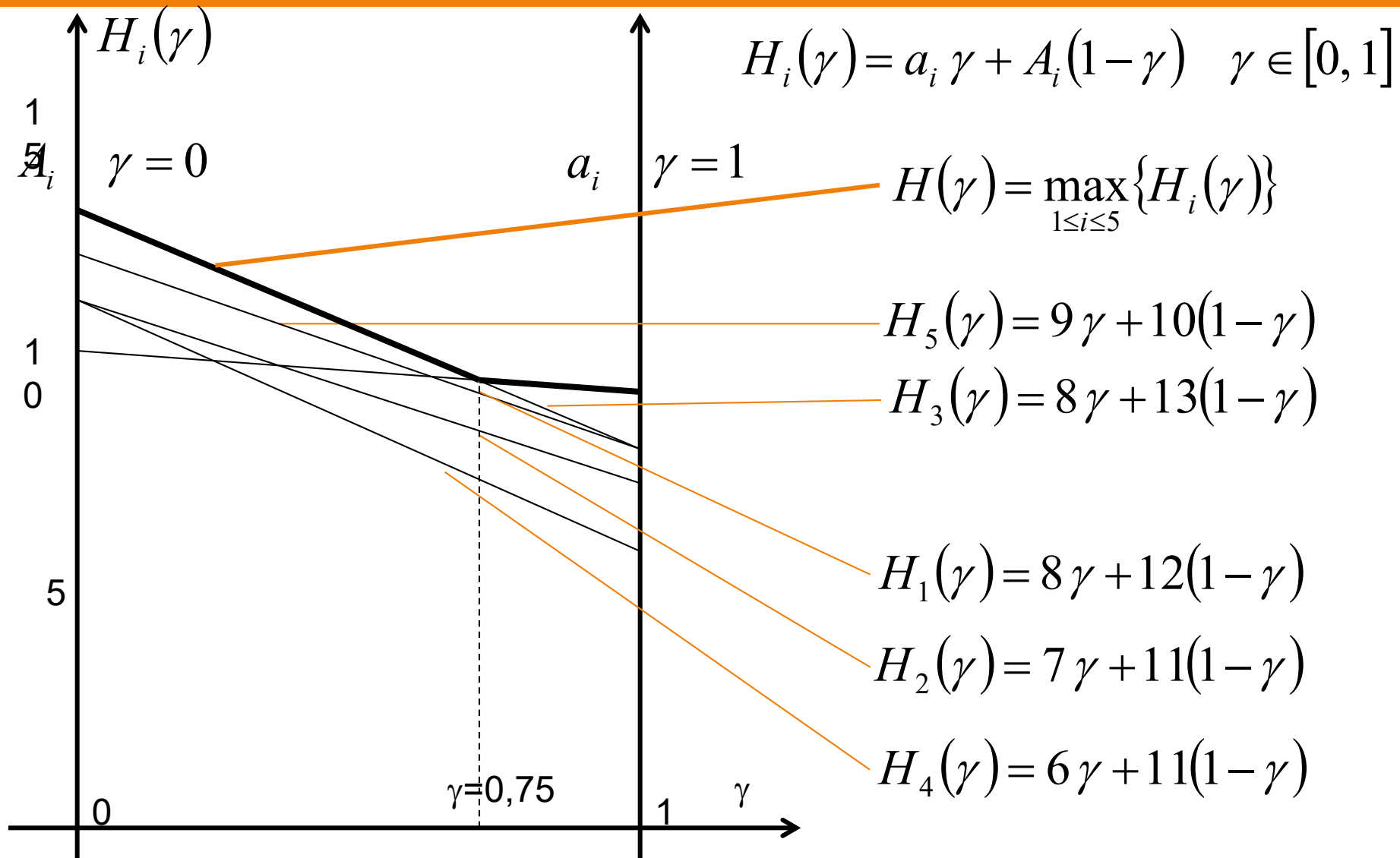
A_i - maksymalna korzyść dla i – tego wiersza

$$H_i(\gamma) = a_i \gamma + A_i(1 - \gamma) \quad \gamma \in [0, 1]$$

Reguła Hurwicza. Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy minimalną i maksymalną korzyść, tj.: wartości a_i oraz A_i , a także wartość funkcji $H_i(\gamma)$ dla ustalonego γ . Wybieramy tę decyzję, dla której wartość funkcji $H_i(\gamma)$ jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			a min	A max	$H(\gamma)$ $\gamma = 0.5$
	susze	normalne	deszcze			
1	8	10	12	8	12	10
2	10	11	7	7	11	9
3	9	13	8	8	13	10.5 ← max
4	11	10	6	6	11	8.5
5	10	10	9	γ 9	10	9.5

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą



Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Macierz wypłat dla gracza A:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...
A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

Macierz wypłat dla gracza B:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	...	$-a_{1m}$	...	$-a_{1M}$
A_2	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	$-a_{2m}$	...	$-a_{2M}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	$-a_{n1}$	$-a_{n2}$	...	$-a_{nm}$	...	$-a_{nM}$
...	...	...	...	...	...	...
A_N	$-a_{N1}$	$-a_{N2}$	...	$-a_{Nm}$	...	$-a_{NM}$

Gracz A maksymalizuje zyski

Gracz B minimalizuje straty

Zwyczajowo podaje się macierz wypłat dla gracza A

Gry w podejmowaniu decyzji

∞ Typowe podejście do rozwiązywania gier

- Wyznaczenie punktu siodłowego
- Usunięcie strategii zdominowanych
- Wyznaczenie strategii mieszanej dla:
 - $N=2$ i $M=2$
 - $N>2$ i $M>2$

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} = \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A \ B		B						min
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M	
	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}	
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}	
max								

$\leftarrow \max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

$\uparrow \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Gry w podejmowaniu decyzji

Strategia zdominowana i dominująca

Gracz A dysponuje strategiami: $A_1, A_2, \dots, A_N$

Strategia $A_{n'}$ jest zdominowana przez strategię $A_{n''}$
(dominującą) $\forall m = 1, 2, \dots, M \quad a_{n'm} \leq a_{n''m}$
jeżeli

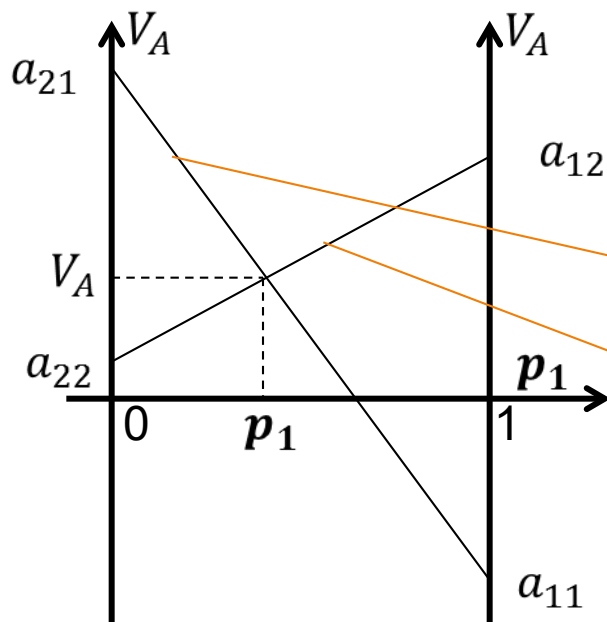
Gracz B dysponuje strategiami: $B_1, B_2, \dots, B_M$

Strategia $B_{m'}$ jest zdominowana przez strategię $B_{m''}$
(dominującą)
jeżeli $\forall n = 1, 2, \dots, N \quad a_{nm'} \geq a_{nm''}$

Gry w podejmowaniu decyzji

$$N = M = 2$$

A B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}



Równania dla gracza A

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = V_A / B_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

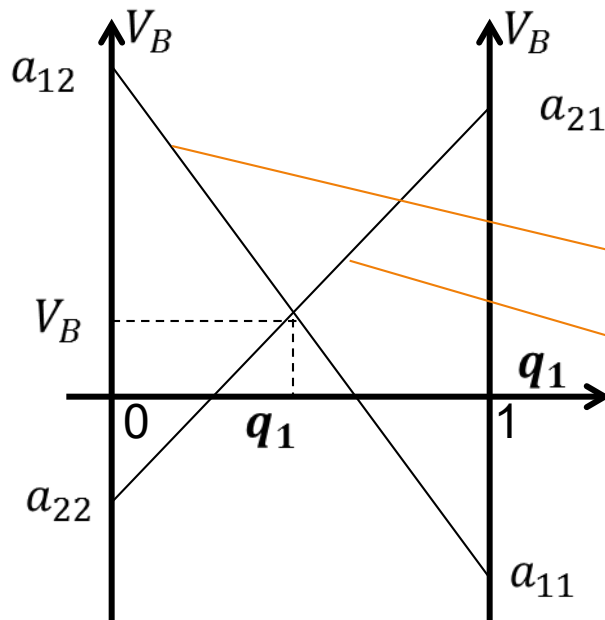
$$p_1 a_{11} + (1 - p_1) a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + (1 - p_1) a_{22} = V_A / B_2$$

Gry w podejmowaniu decyzji

$N = M = 2$

A \ B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}



Równania dla gracza B

$$q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = V_B / A_2$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

$$q_1 a_{11} + (1 - q_1) a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + (1 - q_1) a_{22} = V_B / A_2$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Strategie mieszane $N > 2, M > 2$:

A \ B		q_1	q_2		q_m		q_M
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_n	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_N	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

W tym przypadku rozwiązanie gry sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza A

$$\begin{array}{l} p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \dots + p_N a_{Nm} \geq V_A / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M \\ p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \\ p_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \end{array} \quad \left| \quad /V_A \right.$$

$$\frac{p_1}{V_A} a_{1m} + \frac{p_2}{V_A} a_{2m} + \dots + \frac{p_N}{V_A} a_{Nm} \geq 1 / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\frac{p_1}{V_A} + \frac{p_2}{V_A} + \dots + \frac{p_N}{V_A} = \frac{1}{V_A}$$

$$\frac{p_n}{V_A} \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Niech: $x_n = \frac{p_n}{V_A} \quad n = 1, 2, \dots, N$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza A

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{Nm}x_N \geq 1 / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = \frac{1}{V_A} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Zatem należy minimalizować wyrażenie} \\ \text{Gracz A maksymalizuje zysk} \end{array} \right.$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Ostatecznie zadanie dla gracza A

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_N} (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) = V_{A \min}$$

Przy ograniczeniach:

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{Nm}x_N \geq 1 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$p_n = x_n V_{A \min}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza B

$$q_1 a_{n1} + q_2 a_{n2} + \cdots + q_M a_{nM} \leq V_B / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_M = 1$$

$$q_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$|$
 V_B

$$\frac{q_1}{V_B} a_{n1} + \frac{q_2}{V_B} a_{n2} + \cdots + \frac{q_M}{V_B} a_{nM} \leq 1 / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{q_1}{V_B} + \frac{q_2}{V_B} + \cdots + \frac{q_M}{V_B} = \frac{1}{V_B}$$

$$\frac{q_m}{V_B} \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Niech: $y_m = \frac{q_m}{V_B} \quad m = 1, 2, \dots, M$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza B

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_M = \frac{1}{V} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Zatem należy maksymalizować wyrażenie} \\ \text{B} \end{array} \right.$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{Gracz B minimalizuje straty}$$

Ostatecznie zadanie dla gracza B

$$\max_{y_1, y_2, \dots, y_M} (y_1 + y_2 + \cdots + y_M) = V_{B \max}$$

Przy ograniczeniach:

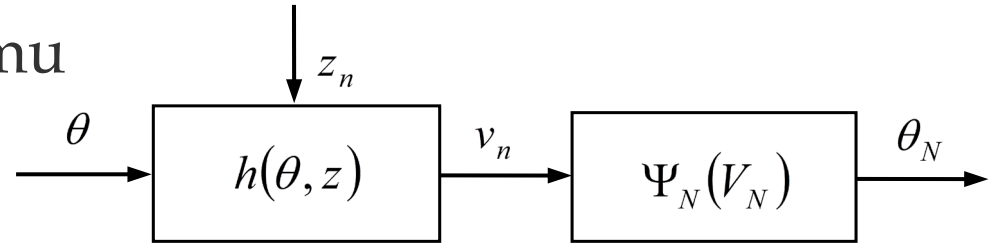
$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$q_m = y_n V_{B \max}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Opis systemu pomiarowego: $v = h(\theta, z)$

gdzie: $v \in \mathcal{V}$, h - znana funkcja, wzajemnie jednoznaczna względem z

$$h: \Theta \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V}, \quad z = h_z^{-1}(\theta, v)$$

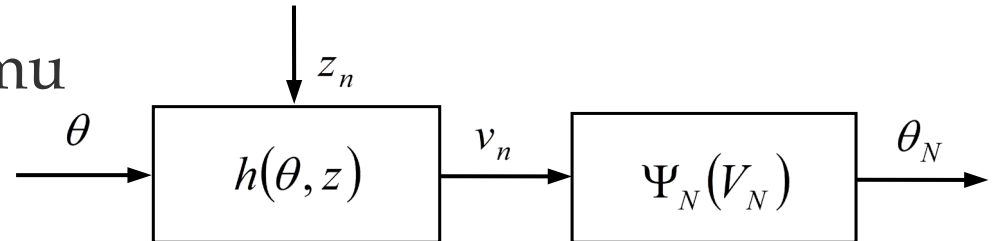
Przykłady funkcji h : $v = h(\theta, z) = \theta + z$

$$v = h(\theta, z) = \theta \cdot z$$

$\mathcal{V}$ - przestrzeń pomiarów($\dim \theta = \dim z = L$)

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

∞ Sformułowanie problemu



Zakłócenia pomiarowe:

z_n - wartość zmiennej losowej $\underline{z}$ z przestrzeni $\mathcal{Z}$

$f_z(z)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{z}$

θ - obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

$f_\theta(\theta)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $\underline{\theta}$

Wyniki pomiarów: $V_N = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_N]$

Zakłócony pomiar wielkości fizycznej

Poszukujemy algorytmu estymacji:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N)$$

∞ Możliwe rozwiązania:

- Metoda najmniejszych kwadratów
- Metoda maksymalnej wiarygodności
- Metody Bayes'a

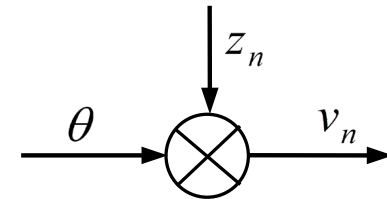
Metoda najmniejszych kwadratów

Założenia:

$v = h(\theta, z) = \theta + z$ – zakłócenia addytywne

$E[\underline{z}] = 0$ – wartość oczekiwana zakłóceń wynosi zero

$Var[\underline{z}] < \infty$ – skończona wariancja zakłóceń



Empiryczna wariancja zakłóceń:

$$Var_{zN}(V_N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_n - \theta)^2$$

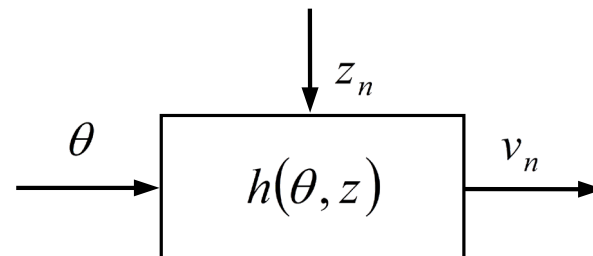
Algorytm estymacji otrzymujemy minimalizując empiryczną wariancję zakłóceń:

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow Var_{zN}(V_N, \theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Var_{zN}(V_N, \theta)$$

Algorytm estymacji:

$$\theta_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$

Metody Bayes'a z obserwacją



Założenia:

$\underline{v} = h(\underline{\theta}, \underline{z})$ - system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją, wzajemnie jednoznaczłą względem $\underline{z}$

$\underline{\theta}$ - obserwowany wektor wielkości, wartość zmiennej losowej $\underline{\theta}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^R$

Postacie funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa $f_z(z)$ oraz $f_\theta(\theta)$ są znane.

Dana jest funkcja strat $L(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, gdzie $\bar{\theta}$ jest wartością estymaty obserwowanej wielkości.

Ryzyko:
$$R(\bar{\Psi}) \stackrel{df}{=} E_{\underline{\theta}, \underline{V}_N} [L(\underline{\theta}, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(\underline{V}_N))] = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\underline{\theta}, \bar{\Psi}(\underline{V}_N)) f(\underline{\theta}, \underline{V}_N) d\underline{\theta} d\underline{V}_N$$

gdzie: $f(\underline{\theta}, \underline{V}_N)$ łączny rozkład prawdopodobieństwa

$$f(\underline{\theta}, \underline{V}_N) = f'(\underline{\theta} | \underline{V}_N) f''(\underline{V}_N)$$

gdzie f' jest warunkową, a f'' brzegową funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

Metody Bayes'a

Problem: $\Psi_N \rightarrow R(\Psi_N) = \min_{\bar{\Psi}} R(\bar{\Psi})$

$$R(\bar{\Psi}) = \int \int_{\mathcal{V}_N \Theta} L(\theta, \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta f''(V_N) dV_N$$

$$r(\bar{\theta}, V_N) \stackrel{\text{df}}{=} E_{\underline{\theta}}[L(\underline{\theta}, \bar{\theta})|V_N] = \int_{\Theta} L(\theta, \bar{\theta} = \bar{\Psi}(V_N)) f'(\theta|V_N) d\theta$$

gdzie: r - ryzyko warunkowe

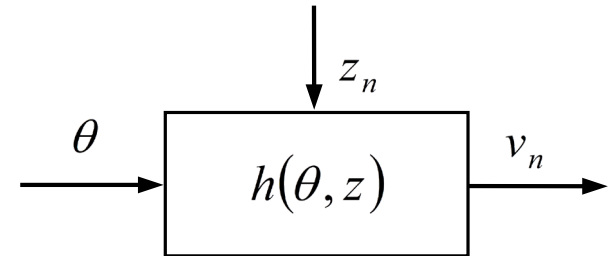
Problem sprowadza się do następującego zadania :

$$\theta_N = \Psi_N(V_N) \rightarrow r(\theta_N, V_N) = \min_{\bar{\theta} \in \Theta} r(\bar{\theta}, V_N)$$

Metoda maksymalnej wiarygodności

Założenia:

$\underline{v} = h(\theta, \underline{z})$ – system pomiarowy opisany jest dowolną funkcją h , wzajemnie jednoznaczłą względem z



Postać funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń $f_z(z)$ jest znana

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej $\underline{v}$

$$f_v(v, \theta) = f_z(h_z^{-1}(\theta, v)) \cdot |J_h|, \quad \text{gdzie: } J_h = \frac{\partial h_z^{-1}(\theta, v)}{\partial v}$$

gdzie: J_h - Jacobian, macierz przekształcenia odwrotnego.

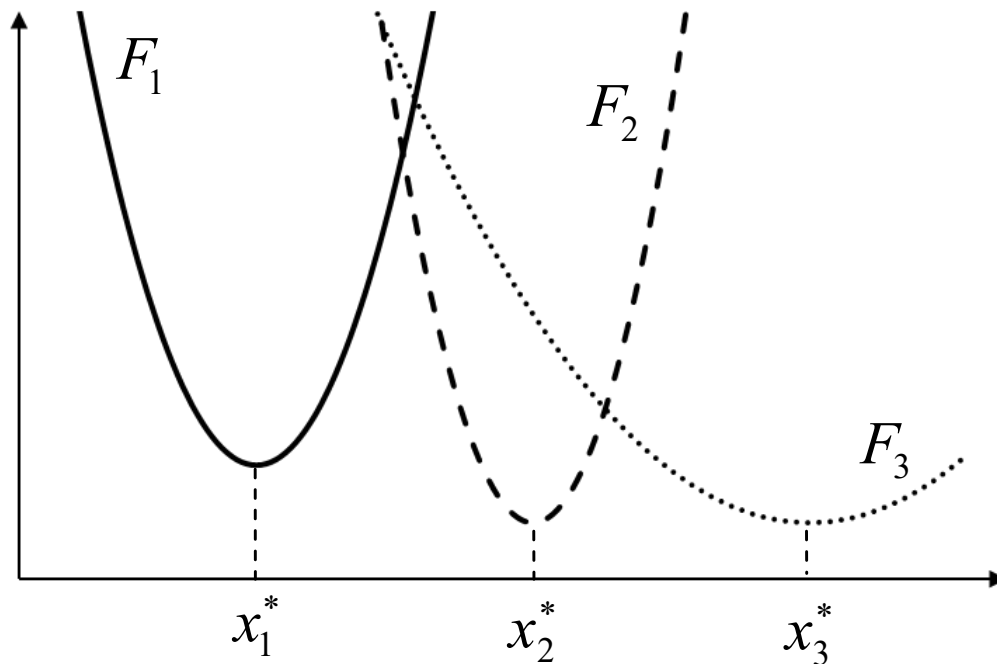
Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L_N(V_N, \theta) = \prod_{n=1}^N f_v(v_n, \theta) = \prod_{n=1}^N f_z(h_z^{-1}(\theta, v_n)) |J_h|,$$

Zadanie polioptymalizacji

x – wektor zmiennych decyzyjnych

$F_1(x), F_2(x), \dots, F_M(x)$ – kilka różnych funkcji celu – ocena wielokryterialna



Poliptymalizacja

Syntetyczny wskaźnik jakości

$$F(x) = H(F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x)) \quad H(.) \text{ – funkcja monotoniczna ze względu na każdą składową}$$

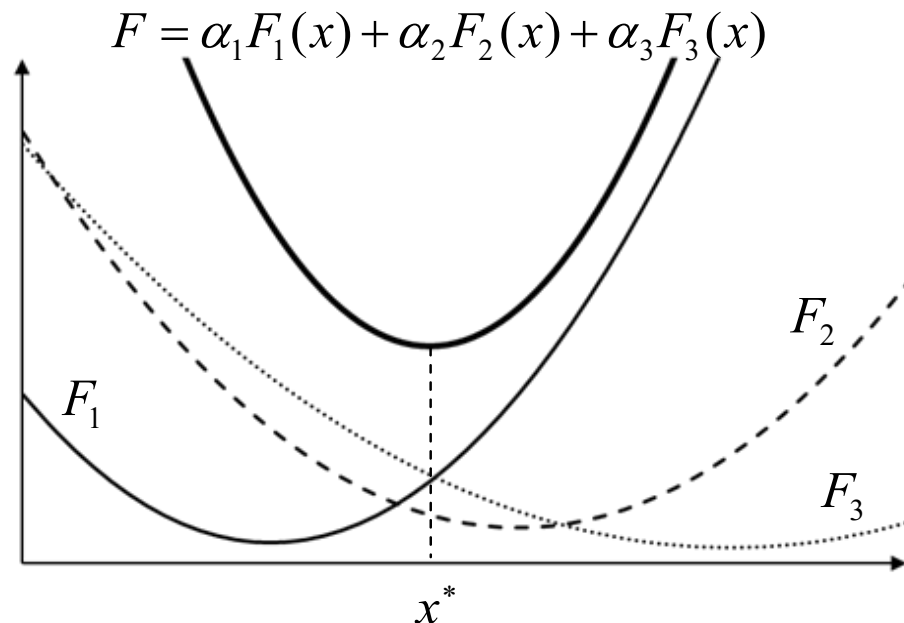
np.:
$$F(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k F_k(x)$$

gdzie:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$F(x) = \prod_{k=1}^K F_k(x)$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



Poliptymalizacja

Optymalizujemy wybrany wskaźnik,
Pozostałe wskaźniki spełnione są w sposób zadowalający.

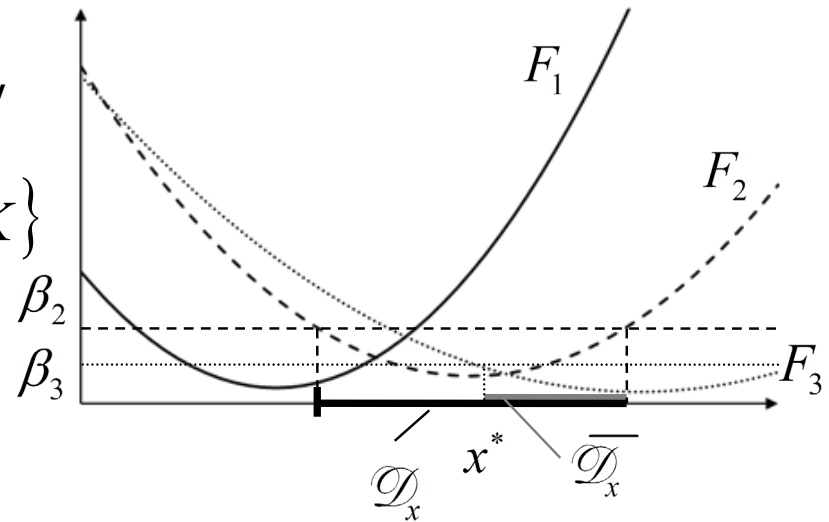
Niech $F_1(x)$ - wybrany wskaźnik

$$F_k(x) \leq \beta_k, \quad k = 2, 3, \dots, K$$

Wskaźniki spełnione w sposób zadowalający

$$\overline{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x \cap \{x \in \mathcal{R}^S : F_k(x) \leq \beta_k, k = 2, \dots, K\}$$

$$x^* \rightarrow F_1(x^*) = \min_{x \in \overline{\mathcal{D}}_x} F_1(x)$$



Poliptymalizacja

Uszeregowane wskaźniki jakości – priorytety wśród wskaźników

$$F_1(x) \succ F_2(x) \succ \dots \succ F_K(x) \quad x \in \mathcal{D}_x$$

Krok 1. $\mathcal{D}_{x_1} = \mathcal{D}_x$

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x_1}} F_1(x)$$

Krok 2. $\mathcal{D}_{x_2} = \mathcal{D}_{x_1} \cap \left\{ x \in \mathcal{R}^s : F_1(x) \leq F_1(x_1^*) + \gamma_1 \right\}$

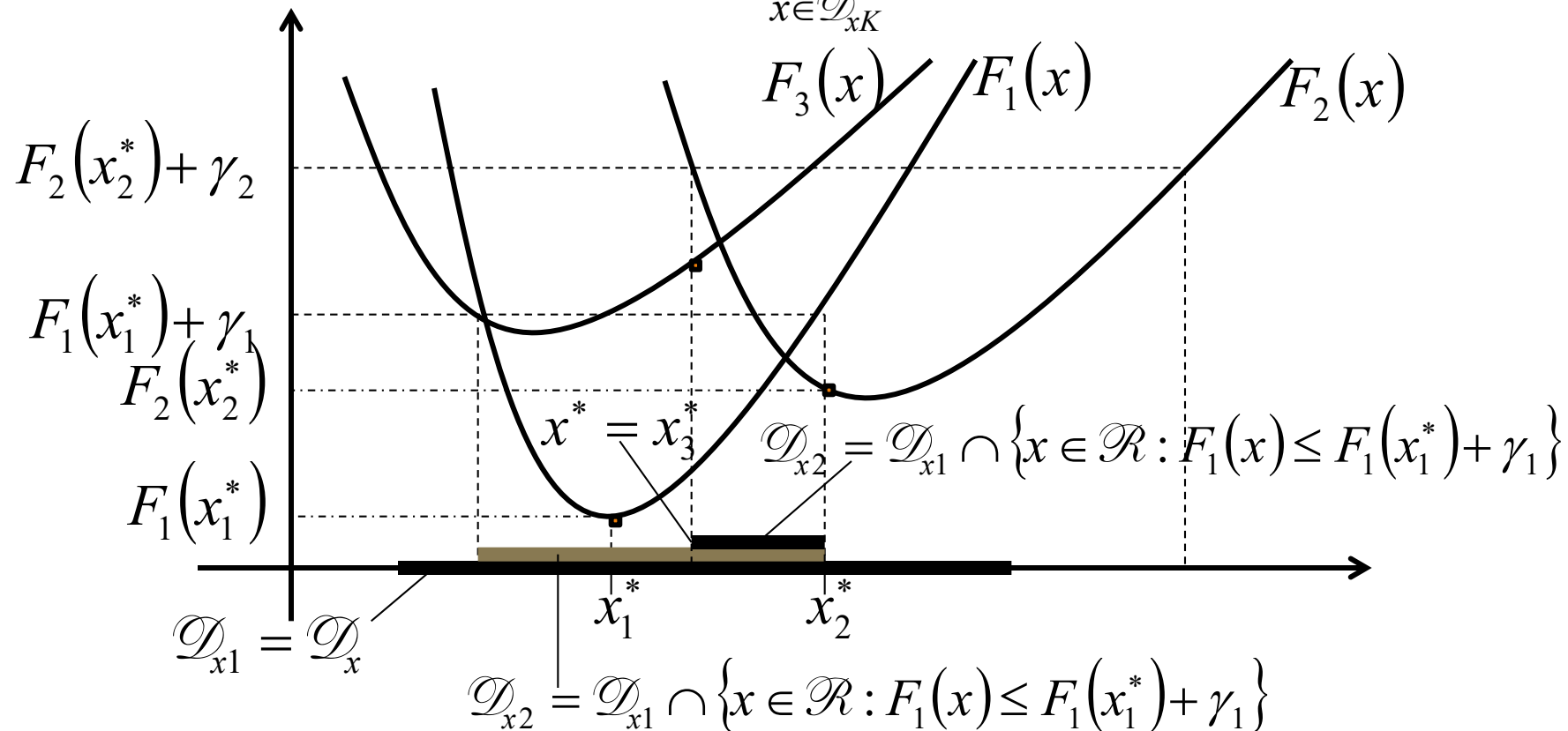
$$x_2^* \rightarrow F_2(x_2^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x_2}} F_2(x)$$

⋮

Poliptymalizacja

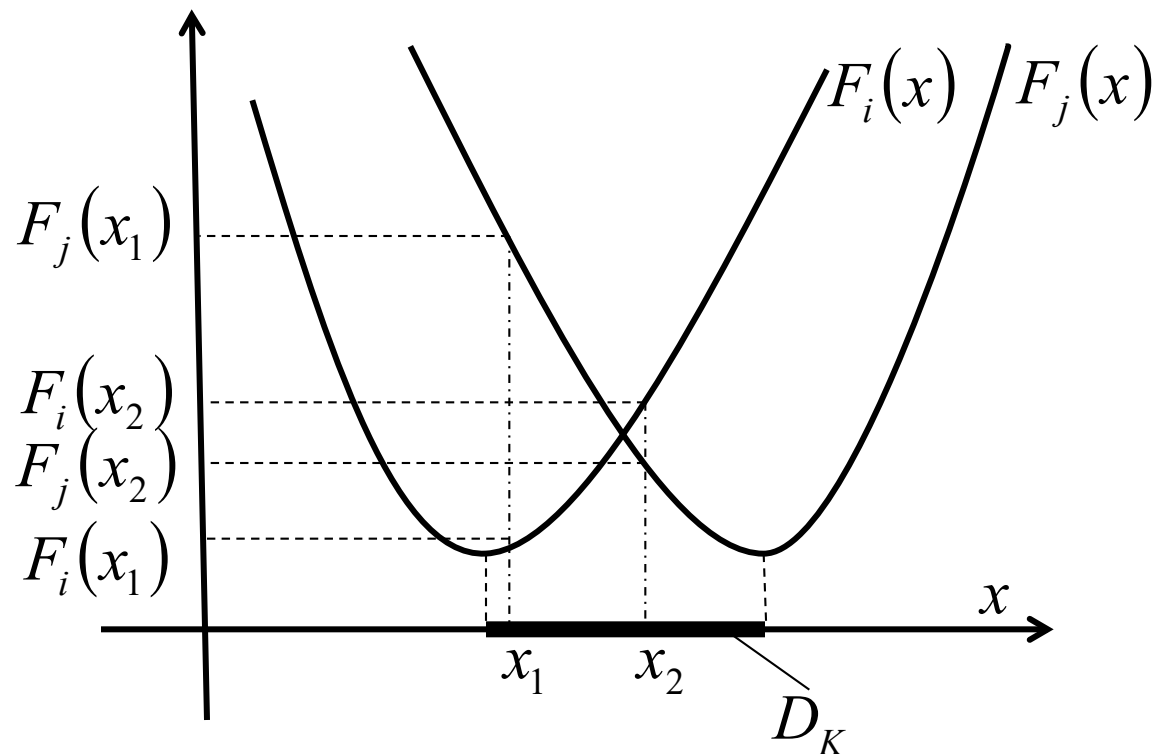
Krok K. $\mathcal{D}_{xK} = \mathcal{D}_{xK-1} \cap \{x \in \mathcal{R}^s : F_{K-1}(x) \leq F_1(x_{K-1}^*) + \gamma_{K-1}\}$

$$x^* = x_K^* \rightarrow F_K(x_K^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{xK}} F_K(x)$$



Zbiór punktów kompromisowych

$$x_1, x_2 \in D_K \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, K\} \exists i \in \{1, 2, \dots, K\} \\ F_j(x_1) > F_j(x_2) \Rightarrow F_i(x_1) < F_i(x_2)$$

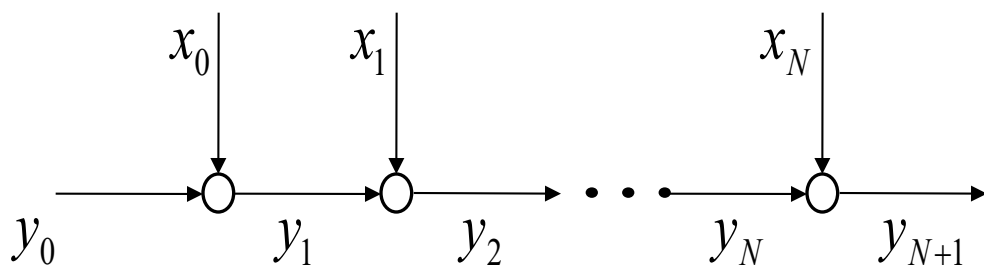


Programowanie dynamiczne

Proces dynamiczny: $y_{n+1} = P(y_n, x_n)$ n – takt

x_n – decyzja w n – tym takcie

y_n – stan procesu w n – tym takcie



15 Saving Tips by
RateCatcher.com



<http://www.all-freeware.com/>

Zadanie decyzyjne: znaleźć ciąg: $x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*$,

dla których wskaźnik $Q(x_0, x_1, \dots, x_N)$ przyjmuje wartość minimalną

Optymalizacja wieloetapowa

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^* \rightarrow F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_S^*) = \min_{x_1, x_2, \dots, x_S \in \mathcal{D}_x} F(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$\mathcal{D}_x = (x_1, x_2, \dots, x_S)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_S]^T \in \mathcal{R}^S : \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_S) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_S) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\}$$

Powyższe zadanie można rozwiązać krok po kroku optymalizując po jednej zmiennej i uzależniając od pozostałych.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$F \equiv F_S, \quad \varphi_l \equiv \varphi_{lS}, l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m = \psi_{mS}, m = 1, 2, \dots, M \quad \mathcal{D}_x \equiv \mathcal{D}_{x_S}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok 1.

$$x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1}) \rightarrow F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = \min_{x_S \in \mathcal{D}_{xS}} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_{S-1}(x_1, x_2, \dots, x_{S-1}) \stackrel{\Delta}{=} F_S(x_1, x_2, \dots, x_S^*) = F_S(x_1, x_2, \dots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1}))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{xS-1}(x_1, \dots, x_{S-1}) &\stackrel{\Delta}{=} \mathcal{D}_{xS}(x_1, \dots, x_{S-1}, x_S^* = G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \\ &\left\{ \begin{aligned} &[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{S-1}]^T \in \mathcal{R}^{S-1} : \\ &\varphi_{lS}(x_1, x_2, \cdots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \varphi_{lS-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{S-1}) = 0, \ l = 1, 2, \dots, L, \\ &\psi_{mS}(x_1, x_2, \cdots, G_S(x_1, \dots, x_{S-1})) = \psi_{mS-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{S-1}) \leq 0, \ m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Optymalizacja wieloetapowa

⋮

Krok S-1.

$$x_2^* = G_2(x_1) \rightarrow F_2(x_1, x_2^*) = \min_{x_2 \in \mathcal{D}_{x_2}} F_2(x_1, x_2)$$

Wartość funkcji celu w punkcie optymalnym:

$$F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} F_2(x_1, x_2^*) = F_2(x_1, G_2(x_1))$$

Ograniczenia w punkcie optymalnym:

$$\mathcal{D}_{x_1}(x_1) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{D}_{x_{S-1}}(x_1, x_2^* = G_1(x_1)) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathcal{R} : \\ \varphi_{l2}(x_1, G_1(x_1)) = \varphi_{l1}(x_1) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \\ \psi_{m2}(x_1, G_{S-1}(x_1)) = \psi_{m1}(x_1) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

Optymalizacja wieloetapowa

Krok S.

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x_1 \in \mathcal{D}_{x_1}} F_1(x_1)$$

Teraz możemy powrócić do zależności „G” wyznaczonych w poprzednich krokach

$$x_1^*$$

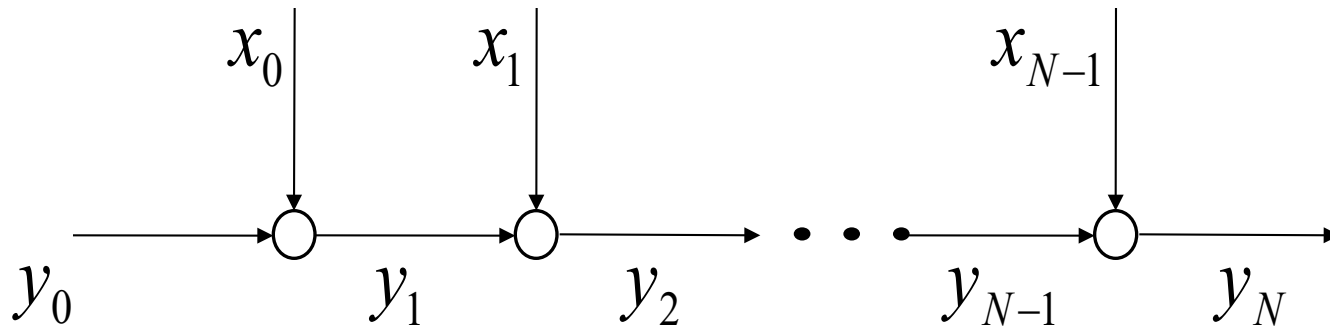
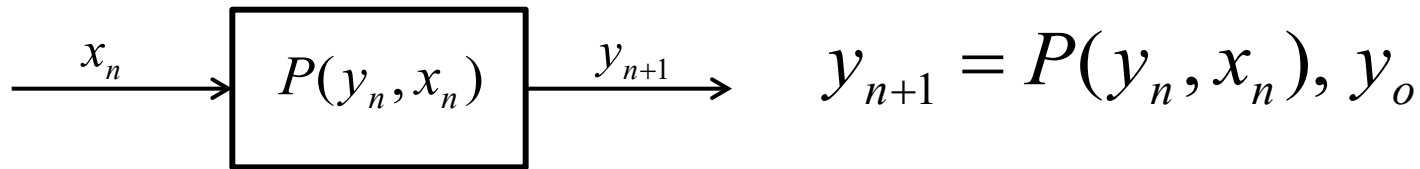
$$x_2^* = G_2(x_1^*)$$

$$\vdots$$

$$x_{S-1}^* = G_{S-1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

$$x_S^* = G_S(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{S-1}^*)$$

Programowanie dynamiczne



$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1}) \stackrel{\Delta}{=} F(y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

Programowanie dynamiczne

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{n+1}(x_n, y_{n+1})$$

Krok 1. $x_{N-1}^* \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, y_N) = \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$

Wiemy że: $y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1})$



$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1}))$$

$$\begin{aligned} V_{N-1}(y_{N-1}) &\stackrel{\Delta}{=} \min_{x_{N-1}} A_N(x_{N-1}, P(y_{N-1}, x_{N-1})) = \\ &= A_N(x_{N-1}^*, P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)) = A_N(G_{N-1}(y_{N-1}), P(y_{N-1}, G_{N-1}(y_{N-1}))) \end{aligned}$$

Programowanie dynamiczne

Krok N.

$$x_0^* \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, y_1) + V_1(y_1)\}$$

Wiemy że:

$$y_1 = P(y_0, x_0)$$

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow \min_{x_0} \{A_1(x_0, P(y_0, x_0)) + V_1(P(y_0, x_0))\}$$

y_0 jest znaną wartością i teraz możemy wyliczyć kolejne wartości decyzji $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

$$x_0^* = G_0(y_0) \rightarrow y_1 = P(y_0, x_0^*)$$

$$x_1^* = G_1(y_1) \rightarrow y_2 = P(y_1, x_1^*)$$

$\vdots$

$$x_{N-2}^* = G_{N-2}(y_{N-2}) \rightarrow y_{N-1} = P(y_{N-2}, x_{N-2}^*)$$

$$x_{N-1}^* = G_{N-1}(y_{N-1}) \rightarrow y_N = P(y_{N-1}, x_{N-1}^*)$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \quad F(x) = H(F_I(x^I, w), F_{II}(x^{II}, w), \dots, F_K(x^K, w))$$

$$x \in \mathcal{D}_x \subset \mathcal{R}^S, \mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S; \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$\mathcal{D}_x = \left\{ x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \\ w \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^S, \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi^I(x^I, w) \\ \varphi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \varphi^K(x^K, w) \\ \varphi^w(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{L_I} \\ 0_{L_{II}} \\ \vdots \\ 0_{L_K} \\ 0_{L_w} \end{bmatrix} = 0_L, \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi^I(x^I, w) \\ \psi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \psi^K(x^K, w) \\ \psi^w(w) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0_{M_I} \\ 0_{M_{II}} \\ \vdots \\ 0_{M_K} \\ 0_{M_w} \end{bmatrix} = 0_M \right\}$$

$$\sum_{k=I}^K L_k + L_w = L, \sum_{k=I}^K M_k + M_w = M$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji

Zadanie rozwiązujemy w dwóch etapach.

Etap I: Dla ustalonej zmiennej koordynacyjnej w rozwiązujemy K zadań

$$x^{k*}(w) \rightarrow F_k(x^{k*}(w), w) = \min_{x^k \in \mathcal{D}_{x^k}(w)} F_k(x^k, w), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Następnie wyznaczamy wartość:

$$\bar{F}(w) \stackrel{\Delta}{=} H(F_I(x^{I*}(w), w), F_{II}(x^{II*}(w), w), \dots, F_K(x^{K*}(w), w))$$

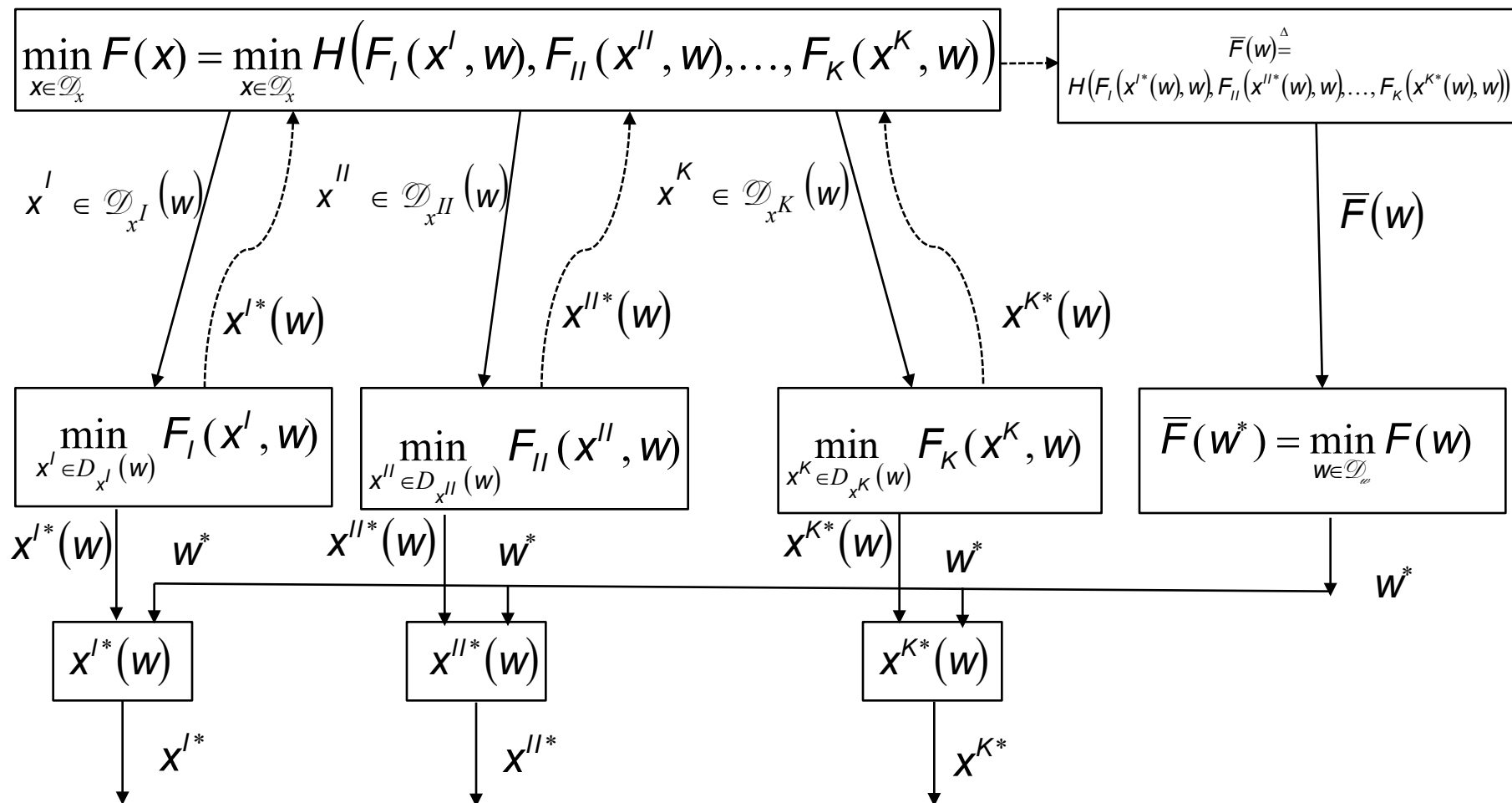
Etap II: wyznaczamy optymalną wartość zmiennej koordynacyjnej rozwiązując zadanie:

$$w^* \rightarrow \bar{F}(w^*) = \min_{w \in \mathcal{D}_w} F(w)$$

ostatecznie

$$x^{k*} = x^{k*}(w^*), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Dekompozycja i koordynacja zadania optymalizacji



Optymalizacja systemów



prof. dr hab. inż. Jerzy Świątek

Egzamin

☞ Optymalizacja systemów

☞ Termin 0 – ostatni wykład:

☞ 4.02.2024 (środa) sala 23, budynek C-3, godz. 13:15 -15:00

☞ Warunki terminu 0:

- Pozytywne aktualne (tegoroczne) zaliczenie z ćwiczeń ≥ 3.5
- Propozycja oceny: ocena z ćwiczeń
- Obecność na ostatnim wykładzie
- Nieobecni (bez względu na przyczynę) rezygnują ze zwolnienia
- Można wcześniej ale nie po terminie 0. Należy przedstawić potwierdzoną ocenę.

☞ Termin 1:

☞ 11.02.2025 (środa) sala 23, budynek C-3, godz. 13:15 -15:00

☞ Termin 2:

☞ 18.02.2025 (środa) sala 23, budynek C-3, godz. 13:15 -15:00

Literatura

❧ LITERATURA PODSTAWOWA:

- ❧ Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1980
- ❧ Seidler J., Badach A., Molisz W., *Metody rozwiązywania zadań optymalizacji*, WNT, Warszawa, 1980
- ❧ Kusiak J., Danielewska-Tulecka A., Oprocha P. *Optymalizacja. Wybrane metody z przykładami zastosowań*, PWN, Warszawa, 2009.
- ❧ Edwin Chong, Stanisław Żak, *An Introduction to Optimization*, John Wiley & Sons, 2013
- ❧ <https://byes.pl/wyklady-prof-swiatka/>



LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:

-  Bazara M.S., Shetty C.M., *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons, New York 1979
-  Brdyś M., Ruszczyński A., *Metody optymalizacji w zadaniach*, WNT, Warszawa 1985
-  De Groot M.H., *Optymalne decyzje statystyczne*, PWN, Warszawa 1981
-  Zieliński R., Neuman P., *Stochastyczne metody poszukiwania minimum funkcji*, WNT, Warszawa 1985

Dziękuję za uwagę

